AM2520-H: Geschiedenis

week 3.7, Dinsdag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 24 maart 2020

Delft University of Technology

Euclides

In *De Elementen* van Euclides vinden we in Boek 9 de volgende propositie (de vertaling is van Dijksterhuis):

Propositie 20

De priemgetallen zijn meer dan elke voorgeschreven hoeveelheid priemgetallen.

Voor de Grieken de collecte priemgetallen is *potentieel oneindig*: je kunt steeds nieuwe objecten in de collectie maken, deze is, zogezegd, nooit af.

Delft University of Technology

Galileo

Uit: *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1638)
Een dialoog tussen Salviati en Simplicio.

In het kort: er zijn veel meer natuurlijke getallen dan kwadraten van natuurlijke getallen.
Kijk maar: tien van de eerste honderd, honderd van de eerste tienduizend, ...

En toch: elk natuurlijk getal is wortel van een kwadraat, dus er lijken toch evenveel kwadraten als natuurlijke getallen te zijn ...

Conclusie?

Galileo

Salviati:

So far as I see we can only infer that the totality of all numbers is infinite, that the number of squares is infinite, and that the number of their roots is infinite; neither is the number of squares less than the totality of all the numbers, nor the latter greater than the former; and finally the attributes “equal”, “greater”, and “less”, are not applicable to infinite, but only to finite, quantities.
When therefore Simplicio introduces several lines of different lengths and asks me how it is possible that the longer ones do not contain more points than the shorter, I answer him that one line does not contain more or less or just as many points as another, but that each line contains an infinite number.

Wikipedia: *Galileo's Paradox* heeft de hele dialoog.

Bolzano

Volgens Bernard Bolzano kunnen we de collectie van natuurlijke getallen (of priemgetallen) best als één verzameling beschouwen.

In zijn boek *Paradoxienen des Unendlichen* schreef hij: "Ik kan het over de verzameling van alle inwoners van Praag of Peking hebben zonder dat ik al die inwoners persoonlijk ken".

TUDelft
Delft University of Technology

Bolzano

Bolzano gaf ook een definitie van het begrip verzameling (Menge):

Menge

Einen Inbegriff, den wir einem solchen Begriffe unterstellen, bei dem die Anordnung seiner Teile gleichgultig ist (an dem sich also nichts für uns Wesentliches ändert, wenn sich bloss diese ändert), nenne ich eine Menge;

Bolzano

Bolzano vond wel, als Galileo, dat er paradoxale kanten aan het oneindige zaten.

Bekijk de intervallen $(0, 5)$ en $(0, 12)$; de eerste is duidelijk een echte deelverzameling van de tweede.

De relatie $12x = 5y$ koppelt elk getal uit de eerste verzameling aan precies één getal uit de tweede en omgekeerd.
De eerste verzameling lijkt dus tegelijk minder elementen dan de tweede te hebben maar ook evenveel.

Delft University of Technology

Nationale Wetenschapsagenda

De woorden ‘oneindig’ en ‘oneindigheid’ komen 25 keer voor als keyword in een vraag voor de Nationale Wetenschapsagenda.

De woorden ‘eindig’ en ‘eindigheid’ samen maar 6 keer.

Een scheve verhouding?

Van Dale

De allereerste editie (1864):

- eindig: bn. en bijw. een einde hebbende.
- oneindig: bn. en bijw. zonder einde;
  (fig.) buitengemeen groot;
  oneindig groot: door geene maat te bepalen;
  oneindig klein: nul.

Chambers

13th Edition (2014):

finite *adj* having an end or limit; subject to limitations or conditions, opp to *infinite*. [l. *finitus*, pap of *finire* to limit]

infinite *adj* without end or limit; greater than any quantity that can be assigned [*maths*]; extending to infinity; vast; in vast numbers; inexhaustible; infinitated (*logic*)

infinitate *vt* to make infinite; to turn into a negative term (*logic*).

Van Dale

De wiskunde is wel gedefinieerd als de wetenschap van het oneindige, die dit met eindige middelen tracht te beheersen

Interessant . . .

In het woordenboek worden meer woorden gebruikt bij ‘oneindig’ dan bij ‘eindig’.

weer scheef

Eenvoudig verband

We houden het simpel:

'oneindig' is 'niet-eindig'

en dus

'eindig' is 'niet-oneindig'

als we de één definiëren is de ander ook afgesproken

Delft University of Technology

Natuurlijke getallen

We maken een kanonieke verzameling 'natuurlijke getallen'.

Oneindigheidsaxioma

Er bestaat een verzameling, S, met

- $\emptyset \in S$, en
- als $x \in S$ dan ook $x \cup \{x\} \in S$

Zo'n verzameling noemen we inductief

Natuurlijke getallen

Stelling

Er is een kleinste inductieve verzameling.

Bewijs.

Pas de stelling van Dedekind toe op S, de afbeelding $\varphi : x \mapsto x \cup \{x\}$ en het punt $\emptyset$. $\square$

We noteren die kleinste inductieve verzameling als $\mathbb{N}$.

Natuurlijke getallen

Stelling

Deze $\mathbb{N}$, met $\varphi(x) = x \cup \{x\}$ voldoet aan de axioma's van Peano.

Een klein verschil: $\emptyset$ gaat zich als 0 gedragen.
Bijvoorbeeld: de optelling start met $x + 0 = x$ in plaats van met $x + 1 = x'$.

Voor verzameltheoreten is deze $\mathbb{N}$ 'de' verzameling der natuurlijke getallen.

Eindig

We hebben zorgvuldig nog niet over ‘oneindig’ gesproken.
Eerst de definitie van ‘eindig’.

Definitie

Een verzameling, X, is eindig als er een natuurlijk getal n en een bijectie $f : n \to X$ bestaan.

Onze definitie van $\mathbb{N}$ geeft dat $n = \{i \in \mathbb{N} : i < n\}$.
Dus $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, enzovoort

Oneindig

Dus, . . . , een verzameling, X, is oneindig als er geen natuurlijk getal n met een bijectie $f : n \to X$ bestaat.

Dus, als je een oneindige verzameling hebt, dan heb je eigenlijk niets.

Of toch . . .

Karakterizering(en) van eindigheid

Hebben we $\mathbb{N}$ nodig om 'eindig' te definiëren?

Alfred Tarski: nee.

Een verzameling, X, is eindig desda elke deelfamilie van $\mathcal{P}(X)$ een maximaal element heeft (ten opzichte van $\subseteq$).

(maximaal: niets is groter)

Karakterizering(en) van eindigheid

Bewijs.

$\Rightarrow$: inductie.

$\Leftarrow$: bekijk $\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{P}(X) : F \text{ is eindig}\}$. $\square$

Dit wordt vaak in gebruikt in de Eindige Combinatoriek.

Weer naar Oneindig

Dus, bij een oneindige verzameling X krijg je een deelfamilie $\mathcal{F}$ van $\mathcal{P}(X)$ zonder maximaal element.

Dat is ten minste iets, helpt het?

Uit Chambers

infinite set *n* (*maths*) a set that can be put into one-one correspondence with part of itself

Natuurlijk: *proper* part

Dat is Dedekind's definitie!
Dat noemen we nu Dedekind-oneindig. Dedekind's definitie is, helaas, opzij gezet.

Bij het college over Dedekind's werk hebben we gebruikt dat Dedekind-*eindig* betekent: elke injectie van de verzameling naar zichzelf is surjectief.

Dedekind-oneindig is beter

Theorem

Equivalent zijn

1. X *is Dedekind-oneindig*
2. *er is een injectieve afbeelding* $f : \mathbb{N} \to X$
3. X *heeft even veel elementen als* $X \cup \{p\}$ *voor (een)* p *niet in* X

Delft University of Technology

Dedekind-oneindig is beter

Bewijs.

1) $\to$ 2): neem $g : X \to X$ injectief-niet-surjectief $g : X \to X$ en $x \in X \setminus g[X]$; definieer $f : \mathbb{N} \to X$ door $f(n) = g^n(x)$.

2) $\to$ 3): neem injectieve $f : \mathbb{N} \to X$ en definieer $g : X \cup \{p\} \to X$ door $g(p) = f(0)$, $g(f(n)) = f(n+1)$, en $g(x) = x$ anders

3) $\to$ 1) Neem bijectieve $h : X \cup \{p\} \to X$ en laat $g = h \restriction X$ $\square$

Relatie

‘eindig’ impliceert ‘Dedekind-eindig’

en dus contrapositief: ‘Dedekind-oneindig’ impliceert ‘oneindig’

En het omgekeerde?

Helaas . . .

We kunnen de implicaties niet zomaar omdraaien, niet zonder een beetje Keuzeaxioma.

Daar hebben we het later misschien nog over.

Voor algebraïci

Een ander idee van Dedekind:

een verzameling, X, is eindig dan en slechts dan als er een afbeelding $f : X \to X$ is zó dat $\emptyset$ en X de enige f-invariante verzamelingen zijn: als $f[A] \subseteq A$ dan $A = \emptyset$ of $A = X$.

Zo'n afbeelding voor $n \in \mathbb{N}$ is een permutatie gegeven door een n-cykel.

Uit een brief van Cantor aan Dedekind

Halle, d. 29ten Nov. 73.

Man nehme den Inbegriff aller positiven ganzzahligen Individuen n und bezeichne ihn mit (n); ferner denke man sich etwa den Inbegriff aller positiven reellen Zahlgrössen x und bezeichne ihn mit (x); so ist die Frage einfach die, ob sich (n) dem (x) so zuordenen lasse, dass zu jedem Individuum des einen Inbegriffes ein und nur eines des andern gehört?

TU Delft
Delft University of Technology

Het antwoord, van Cantor zelf

Halle, d. 7ten December 73.

...

So glaube ich schliesslich zum Grunde gekommen zu sein, weshalb sich der in meinen fruheren Briefen mit (x) bezeichnete Inbegriff *nicht* dem mit (n) bezeichneten eindeutig zuordnen lässt.

De gepubliceerde versie

Uit: *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, 1874*

§ 2

Wenn eine nach irgendeinem Gesetze gegebenen unendliche Reihe von einander verschiedener reeller Zahlgrößen

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu, \ldots \tag{4}$$

vorliegt, so läßt sich in jedem vorgegebenen Intervalle $(\alpha \ldots \beta)$ eine Zahl η (und folglich unendlich viele solcher Zahlen) bestimmen, welche in der Reihe (4) nicht vorkommt; dies sol nun bewiesen werden.

Reactie van Dedekind

In het begin: wat een rare vraag.

Later: toch niet zo gek want het laat zien dat het overgrote deel der reële getallen *niet* algebraïsch is.

Dat was in die tijd een belangrijk probleem; in 1882 bewees Lindemann dat π *transcendent* ($=$ niet algebraïsch) is.

Hoe helpt dit?

Het opent een deur naar nieuwe resultaten, in het bijzonder bestaansbewijzen.

In de ‘eindige’ wiskunde is dit een veelgebruikte methode om het bestaan van iets aan te tonen: (1) tel alles; (2) tel de niet-gewenste dingen; (3) als het tweede aantal kleiner is dan het eerste: klaar!

Cantor gaf aan hoe je dit met oneindige hoeveelheden kunt doen: omdat er ‘meer’ reële getallen zijn dan algebraïsche moeten er wel niet-algebraïsche getallen bestaan.

Belangrijk punt

In tegenstelling tot wat er bij ons sinds de kleuterschool (en eerder) ingedoctrineerd is: een verzameling heeft geen intrinsiek 'aantal elementen'.

Eén van de eerste dingen die ik in een nieuwe taal wil leren is tellen, omdat ik de lokale labels voor de 'aantallen' niet ken.

De verzamelingenleer geeft in ieder geval ondubbelzinnige betekenissen aan 'meer', 'minder' en 'even veel'.
Voor *alle* verzamelingen.

Oneindig als aantal

Voor eindige verzamelingen hebben we een collectie standaardverzamelingen waar we rest mee kunnen vergelijken.

Cantor liet zien dat twee bekende oneindige standaardverzamelingen *verschillende* ijkpunten opleveren.

$\mathbb{N}$, de verzameling der natuurlijke getallen

$\mathbb{R}$, de verzameling der reëele getallen (de getallenlijn).

Delft University of Technology

Oneindig als aantal

Cantor's resultaat is te formuleren als.

Stelling

$\mathbb{N}$ *en* $\mathbb{R}$ *zijn niet even groot*

Cantor kon van een heleboel verzamelingen uit de Analyse laten zien dat ze even groot zijn als $\mathbb{N}$, of even groot als $\mathbb{R}$.

En: netjes, door expliciet koppelingen aan te geven.

Formules

Definieer $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ door

$$f : n \mapsto (-1)^n \left(\frac{n}{2} + \frac{1-(-1)^n}{4} \right)$$

Een bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$.

Formules

Of definieer $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ door

$$g : (m, n) \mapsto \frac{1}{2}(m+n)(m+n+1) + m$$

(Cantor)

De verzameling *paren* natuurlijke getallen is even groot als de verzameling natuurlijke getallen zelf.

Zonder mooie formule

Er is een bijectie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

De x-as en het vlak zijn even groot.

Er is zelfs een bijectie $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Er zijn evenveel reële getallen als rijen reële getallen.

Delft University of Technology

Continuumhypothese

Cantor vermoedde, en dacht vaak te kunnen bewijzen, dat voor oneindige deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ geldt: even groot als $\mathbb{N}$ of even groot als $\mathbb{R}$.

Alexandroff en Hausdorff bewezen dit voor een speciale familie deelverzamelingen: de Borelverzamelingen, zie Reële Analyse.

Gödel bewees: de Continuumhypothese is niet fout.
Dat is iets anders dan een bewijs van de Continuumhypothese geven.

Niet bewijsbaar

2 BASIC PROBLEMS OF MATH SOLVED

Proof Involves Set Theory, Now Used in Schools

By JOHN A. OSMUNDSEN
Special to The New York Times.

NEW YORK.

Two of the most fundamental questions in mathematics today have been answered by Paul J. Cohen, a young Stanford University mathematician.

The two questions had persisted for more than a quarter century. By answering them, Dr. Cohen demonstrated the power of modern mathematics. Ironically, he exposed some of its weakness as well.

The proof, which will be published soon, concerns a branch of mathematics known as the theory of sets, which deals with collections of things. Dr. Cohen's work has meaning, however, for the foundations of all mathematics.

The theory of sets was developed by Georg Cantor, a German, in 1871. Today, it provides part of the basis for the so-called "new mathematics" that is being taught in many elementary and high schools across the country.

The idea behind the use of set theory as a teaching aid in beginning mathematics is that concepts such as those of numbers, counting and arithmetic can be more easily understood by seeing how things can be grouped together and how various collections of things are related to one another than by the rote learning of rules.

Moreover, set theory serves as a powerful research probe into the foundations of mathematics. In fact, one mathematician observed recently that all of mathematics could be ex-

Continued on Page 4, Column 3

Nov. 14, 1963
N.Y. Times

2 Basic Problems of Math Are Solved

Continued from Page 1, Col. 8

pressed in terms of the theory of sets.

A brief introduction to set theory and the contribution to it made by Dr. Cohen were presented at a seminar on mathematics for science writers recently by Prof. Raymond M. Smullyan of Yeshiva University.

The seminar was held at Columbia University under the auspices of the Society for Industrial and Applied Mathematics and the Martin Company's Research Institute for Advanced Studies. The following is how Professor Smullyan explained things.

A set is a collection of things—numbers, points on a line, various objects, and so forth. An important characteristic of a set is the number of things it contains. This is called the set's cardinal number. All sets whose elements can be put into one-to-one correspondence with those of each other are said to be equivalent and have the same cardinal number.

For example, the set consisting of the fingers on the left hand is equivalent to the set of fingers on the right and to the set of men on a basketball team because the elements of each set can be put into a one-to-one relationship with those of each of the other two. Their common cardinal number is five.

Those sets would not be equivalent, of course, to the set of dimes in a dollar or the set of wheels on a car, because the cardinal numbers of those sets are 10 and 4, respectively.

Infinitely Large Sets

There are infinitely large sets, too. The set of all whole numbers is an example of an infinite set. It is equivalent to the set of all even numbers because, for every whole number, it is possible to find an even number to correspond. For the same reason, the set of all odd numbers and the set of all pairs of whole numbers are also equivalent to the set of all whole numbers.

Whole 1, 2, 3, 4, 5 ......n
Even 2, 4, 6, 8, 10 ....2n
Odd 1, 3, 5, 7, 9.....(2n-1)

Dr. Cantor gave the name "aleph-null" to the cardinal number of sets of all such finite numbers (0, 1, 2, 3, 4, etc.) It might seem that all infinite sets would have this same cardinal number, but Dr. Cantor showed otherwise.

He showed, first, that such sets as the set of all real numbers between zero and one (decimals, that is), the set of all points on a line and the collection of all sets of whole numbers have a higher cardinal number than aleph-null. He called this cardinal number "c," for the "power of the continuum."

Dr. Cantor showed that the cardinal number, c, is higher than aleph-null by the following sort of proof.

Proof Is Outlined

Make a collection of all conceivable sets of whole numbers such that, arbitrarily, Set 1 might contain all numbers between 10 and 50, Set 2 might have all even numbers between 1 and 25, Set 3 all numbers between 36 and 92, etc.

Next, match each set with each whole number in the set of all whole numbers so that Set 1 goes with "one," Set 2 with "two," etc.

Now, make a new set of whole numbers in an orderly way by putting the number "one" into this new set if the first set does not contain "one" or leaving "one" out if the first set has it, putting the number "two" into the new set if the second set does not have it or leaving "two" out of the new one if that number is in the second set, etc.

The result will be a set of whole numbers that differs from each of the other sets in the collection by at least one number. This new set, of course, must belong to the collection of all sets of whole numbers. But that collection had been put into one-to-one correspondence with the set of all whole numbers (cardinal number, aleph-null) before the new set was constructed.

Therefore, the resultant collection of sets of whole numbers—including the newly constructed set—is larger than the whole number set and must have a higher cardinal number, c, than aleph-null.

Dr. Cantor then went on to show that there are infinitely many cardinal numbers that can be arranged in an ascending sequence.

That this is so followed from Dr. Cantor's demonstration that the collection of subsets of any set is larger than the set itself. This principle is obvious for finite sets. The subsets of a three-element set of such figures as 1, 2, 3, for example, are 1; 2; 3 (all one-element subsets); 1, 2; 1, 3; 2, 3 (all two-element subsets); 1, 2, 3 (the set itself); and an empty set—or eight in all. Cantor showed this was true for infinite sets as well.

SET

1	2	3

= 3 elements (Cardinal number 3)

SUBSETS

1	2	3
1,2	1,3	2,3
1,2,3		

= 8 elements (Cardinal number 8)

This situation gave rise immediately to a fundamental question involving set theory. If aleph-null is the smallest cardinal number for an infinite set, and there are infinitely many such cardinal numbers, what is the second smallest cardinal number of this sort? Particularly, is c the next higher one after aleph-null?

In other words, is there a collection of things that is larger than the collection of all whole numbers (cardinal number, aleph-null) but smaller than the collection of all sets or the collection of all points on a line (cardinal number, c)? Or is there an intermediate-sized set with a cardinal number between aleph-null and c? This has become known as the "continuum problem" or the "continuum hypothesis."

In 1938, Kurt Goedel of the Institute for Advanced Study in Princeton proved that the continuum hypothesis could not be disproved with the existing axioms of set theory. He did this by showing that the continuum hypothesis was true under a new definition of the word "set" under which all the axioms of set theory held true, also.

This left the question open, however, whether there were other consistent models of set theory in which the continuum hypothesis would be false. In other words, could the continuum problem be solved at all with the axioms of set theory?

It is a fundamental question that Dr. Cohen has now answered. He found another model of sets that satisfied all the axioms of the theory but under which the continuum hypothesis was untrue. Thus, the existence of an intermediate cardinal number between aleph-null and c cannot be proved with set theory as it now stands, and the continuum problem will remain a problem until some fundamentally new axioms are invented.

'Axiom of Choice' Tested

In the course of producing that proof, Dr. Cohen answered another fundamental question. It concerned the "axiom of choice," one of the most important tools in mathematics.

This axiom states that it is possible to take one element out of each set in a collection of sets and make a new set from them.

This may seem on the surface to be self-evident. Yet, it has never been proved, and mathematicians would like to prove it because this axiom is so universally applied. Some years ago, Bertrand Russell gave an illustration of the necessity for the axiom.

One can make a new set of shoes from a set of pairs of shoes by extracting one shoe from each pair without deciding each time which shoe to take: simply order all left shoes (or all right shoes). This cannot be done with a set of pairs of socks, however, because there are no left or right socks. Thus, a choice between the socks in each pair must be made each time for the construction of a new set.

Professor Goedel also worked on this problem and was able to show that the axiom of choice could not be disproved with set theory. Again, however, the question remained whether the axiom could be proved.

This is the second fundamental question that Dr. Cohen has answered. He has shown during the proof involving the continuum problem that the axiom of choice cannot be proved, either, with set theory.

"More important still," Professor Smullyan remarked in this connection, "is that Cohen has shown that the continuum problem cannot be solved even with the use of the axiom of choice."

"Thus," he said, "the most powerful set of reasonable axioms we have at our disposal is insufficient to settle the problem one way or another."

De New York Times
van 14 november 1963

voorpagina en pagina 4

2 basic problems of math solved

Inhoud:
Cantor's vermoeden is onbewijsbaar
(evenals het Keuzeaxioma,
zie pag. 79 en verder)

Delft University of Technology