AM2520-H: Geschiedenis

week 3.7, Vrijdag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 27 maart 2020

Delft University of Technology

Outline

1. Het begin: gokken en spelletjes
2. Steeds meer Analyse
3. Statistiek

De Vetula

Er is een gedicht, *De Vetula*, geschreven tussen 1200 en 1400, met daarin (vrij vertaald)

> Als alle gelijk zijn is er voor elk getal één manier
> Bij twee gelijken en een andere zijn er drie manieren
> Bij drie verschillende zijn er zes manieren

Dit gaat over hoe een worp met drie dobbelstenen kan uitvallen.
En het totaal aantal manieren is inderdaad als in het gedicht staat: 216.

Cardano: *Liber de ludo aleae*

Hij schreef over wat in het Engels ‘odds’ heet (in het Nederlands ‘kansen’).

Een zes gooien met een dobbelsteen heeft succeskans $\frac{1}{6}$,
maar de ‘odds’ zijn $1:5$ (de verhouding succes : mislukking, dus).

Delft University of Technology

Cardano

Cardano ontdekte dat je onafhankelijke succeskansen wel kan vermenigvuldigen maar odds niet.

Kans op twee zessen bij twee worpen: $\frac{1}{36}$, dus de odds zijn $1 : 35$.
De odds vermenigvuldigen leidt tot $1 : 25$ (en een succeskans van $\frac{1}{26}$).

Nog extremer. Een zuivere-muntworp heeft odds van $1 : 1$.
Bij twee worpen heeft kop-kop echt geen odds van $1 : 1$.

Cardano

Ander probleem, het twee-zessenprobleem:
wanneer zijn de odds $1:1$ bij herhaald gooien van twee dobbelstenen,
waarbij succes betekent: ten minste één keer zes-zes gooien.

Cardano: succeskans bij één worp is $\frac{1}{36}$, dus bij 18 worpen zijn de odds $1:1$ geworden.

En de denkfout is ...?

Pascal: potten verdelen en de twee zessen

Een vriend/kennis, Chevalier de Méré, stelde twee vragen:

- hoe verdeelt men de pot bij het voortijdig afbreken van een serie spelletjes? Het gaat, bijvoorbeeld, om zes gewonnen spelletjes en de stand is 5-4.
- het twee-zessenprobleem: hoe vaak moet je met twee dobbelstenen gooien om met kans $\frac{1}{2}$ ten minste één keer zes-zes te gooien?

Delft University of Technology

Pascal: potten verdelen

Pascal rekende terug.

Ten eerste: de voorgeschiedenis is niet belangrijk.
Wat telt is: hoeveel moet I nog winnen en hoeveel moet II nog winnen.
Dus twee getallen zijn belangrijk:

- r het aantal dat I nog moet winnen, en
- s het aantal dat II nog moet winnen.

Er hadden dus nog ten hoogste $r + s - 1$ potjes gespeeld hoeven worden.

Delft University of Technology

Pascal

Uitgangspunten van Pascal:

- Iedere speler krijgt wat zij zeker gewonnen zou hebben.
- Wat onzeker is moet gelijk verdeeld worden.

Pascal

En nu terugrekenen:

Als $r = 1$ en $s = 1$: alles is onzeker, dus gelijk delen.

Als $r = 1$ en $s = 2$:
als I de volgende pot wint krijgt zij alles,
en als II wint zijn we in de eerste situatie en moet er gedeeld worden.

Dus I krijgt zeker de helft. De andere helft is onzeker, dus die wordt gehalveerd.
Kortom: I krijgt $\frac{3}{4}$ en II krijgt $\frac{1}{4}$.

Pascal

Als $r = 2$ en $s = 2$: na één potje zijn we in de vorige situatie of gespiegeld.

Ieder krijgt zeker $\frac{1}{4}$,
de rest moet gedeeld worden,
dus ieder krijgt $\frac{1}{2}$.

Pascal

Als $r = 1$ en $s = 3$:

als I wint krijgt zij alles;
als II wint gaat het als $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}$,
dus I krijgt zeker $\frac{3}{4}$.
De rest wordt gedeeld dus I krijgt $\frac{7}{8}$ en II krijgt $\frac{1}{8}$.

Pascal

Algemeen: schrijf $n = r + s - 1$
(het maximum aantal potjes dat nog gespeeld moet worden).

En hier komt de driehoek van Pascal tevoorschijn.
Wat I krijgt is

$$2^{-n} \sum_{k=0}^{s-1} \binom{n}{k}$$

Bewijs: met inductie via de terugrekenstappen.

Delft University of Technology

Pascal: twee zessen

De Méré wist dat de kans op ten minste één zes bij vier worpen meer dan $\frac{1}{2}$ is.
(Dat is ook zo: $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296}$. Maar misschien dacht hij dat het $\frac{2}{3}$ is.)

Hij dacht dat dus(!) bij 24 worpen (vier-zesde van 36) van twee stenen de kans op ten minste één keer zes-zes ook ten minste $\frac{1}{2}$ was.

Maar hij verloor er geld op.
Want

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} = \frac{1103\ldots}{2245\ldots} < \frac{1}{2}$$

en

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{25} = \frac{4086\ldots}{8082\ldots} > \frac{1}{2}$$

Christiaan Huygens: *Van Rekeningh in Spelen van Geluck*

Voor het eerste de notie van *verwachting* (niet met die naam).

Als ik a of b verwacht en heb de gelijke kans deze te winnen dan is dit spel mij $\frac{1}{2}(a+b)$ waard.

Dat is wat wij nu de winstverwachting noemen.

TU Delft
Delft University of Technology

Huygens

Algemener: als de kansen respectievelijk p en q zijn is het spel mij

$$\frac{pa + qb}{p + q}$$

waard.

Huygens bekeek ook uitgebreid het probleem van De Méré van de twee zessen.
Hij rekende uit dat het spel pas bij 25 worpen meer dan $\frac{1}{2}a$ waard was (bij uitbetaling van a).

Jacob Bernoulli: *Ars Conjectandi*

Dit werk is uit (1713) en bestaat uit vier delen.

Eerste deel: herdruk van het boekje van Huygens.
Met oplossingen van de sommen die Huygens aan het eind had opgegeven.

Jacob Bernoulli

Het tweede deel van *Ars Conjectandi* bestaat uit de theorie van permutaties en combinaties.

De reden: “tot nu toe zijn niet altijd alle mogelijkheden goed en uitputtend geteld.”

Ook met de binomiale kansverdeling.

TUDelft
Delft University of Technology

Jacob Bernoulli

Wat nu Bernoulli-getallen heten: die spelen een rol bij formules voor de sommen

$$\sum_{i=1}^{n} i^k$$

Bernoulli wist die voor alle machten te maken.

Delft University of Technology

Jacob Bernoulli

Er geldt

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = \frac{1}{k+1} n^{k+1} + \frac{1}{2} n^k + \frac{k}{2} B_2 n^{k-1} + \frac{k(k-1)(k-2)}{2\cdot 3\cdot 4} B_4 n^{k-3} + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} B_6 n^{k-5} + \cdots$$

met $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, ...

TUDelft
Delft University of Technology

Jacob Bernoulli

Algemene betrekking: $B_0 = 1$, en

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0 \qquad (n \geqslant 2)$$

Deze getallen komen ook tevoorschijn bij de machtreeks van

$$\frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$$

(zie AM2040, *Complexe Functies*)

Jacob Bernoulli: twee-zessenprobleem

Het derde deel bevat een analyse van allerlei kansspelen, met behulp van het eerdere materiaal.

Ook weer het twee-zessenprobleem. Maar gegeneraliseerd.

Niet zes maar c uitkomsten en niet vijf maar b ongewenste uitkomsten.

Dus bij n 'worpen' c^n mogelijke rijen uitkomsten,
waarvan b^n zonder gewenste uitkomst,
dus $c^n - b^n$ gunstige rijen.

Jacob Bernoulli

Om kans $\frac{1}{2}$ op een gunstige rij te hebben moet $b^n = c^n - b^n$ gelden, of $c^n = 2b^n$.

Gebruik logaritmen: $n \log c = \log 2 + n \log b$ of

$$n = \frac{\log 2}{\log c - \log b}.$$

Bij het twee-zessenprobleem geldt $c = 36$ en $b = 35$, dus $n = \log 2/(\log 36 - \log 35)$, en dat is ongeveer 24.605.

Jacob Bernoulli

Het vierde deel bevat de Wet van de Grote Aantallen.

In Bernoulli's formulering

Trek, met teruglegging, knikkers uit een urn met w witte en z zwarte knikkers.
Laat X het aantal witte knikkers bij N trekkingen zijn, en $p = \frac{w}{w+b}$ (de succeskans).

Bij gegeven $\varepsilon > 0$ en een (grote) positieve c is er een N zó dat

$$P\left(\left|\frac{X}{N} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) > c \cdot P\left(\left|\frac{X}{N} - p\right| > \varepsilon\right)$$

Dus de kans dat X/N dicht bij p ligt wordt veel groter dan dat hij ver van p af ligt.

Jacob Bernoulli

Bernoulli gebruikte dit om uit te rekenen wanneer iets ‘moreel zeker’ was.

Iets is moreel zeker als de kans er op ten minste 0,999 is.
Iets is moreel onmogelijk als de kans er op ten hoogste 0,001 is.

Als je in de stelling $c = 1000$ neemt en dan een passende N is het ‘moreel zeker’ dat je met X/N een goede schatting van de fractie witte knikkers hebt.

Probleem: de berekende passende N was onpraktisch groot.

Delft University of Technology

De Moivre: *The Doctrine of Chances*

Met de eerste definitie van 'waarschijnlijkheid':

> The Probability of an Event is greater, or less, according to the number of Chances by which it may happen, compared with the whole number of Chances by which it may either happen or fail.

en dus

> the Probabilities of happening and failing being added together, their Sum will always be equal to Unity.

De Moivre

Ook hier het twee-zessenprobleem.

Problem III

To find in how many trials an event will probably happen, or how many trials will be necessary to make it indifferent to lay on its happening or failing, supposing that a is the number of chances for its happening in any one trial and b is the number of chances for its failing.

Delft University of Technology

De Moivre

Oplossing als bij Bernoulli.
Nu moet

$$\frac{b^x}{(a+b)^x} = \frac{1}{2} \qquad \text{of} \qquad (a+b)^x = 2b^x$$

En weer

$$x = \frac{\log 2}{\log(a+b) - \log b}$$

Een stap verder: neem q zo dat $a : b = 1 : q$.

De Moivre

We hadden

$$\left(1+\frac{1}{q}\right)^x = 2 \qquad \text{of} \qquad x\log\left(1+\frac{1}{q}\right) = \log 2$$

Maar $\log(1+x)$ heeft een mooie machtreeks $(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots)$ en als q groot is is $1/q$ klein en heb je aan de term $1/q$ genoeg.

Neem gewoon $x = q\log 2 \approx 0.7q$.

Bij het twee-zessenprobleem hebben we $a = 1$, $b = 35$, dus $q = 35$.
De benadering geeft $x \approx 0.7 \cdot 35 = 24.5$.

De Moivre

De Moivre bekeek de binomiale verdeling met succeskans $\frac{1}{2}$ en een even aantal pogingen n.

Door slim werk met logaritmen en machtreeksen benaderde hij de kans $P(X = \frac{n}{2})$ als volgt

$$\binom{n}{n/2} 2^{-n} \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi n}}$$

En met nog meer werk

$$P(X = \tfrac{n}{2} + t) \approx P(X = \tfrac{n}{2}) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2t^2}{n}} \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \mathrm{e}^{-\frac{2t^2}{n}}$$

De Moivre

En daar is de normale benadering van de binomiale verdeling:

$$\sum_{t=0}^{k} P(X = \tfrac{n}{2} + t) \approx \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \int_0^k \mathrm{e}^{-\frac{2t^2}{n}} \, \mathrm{d}t$$

Thomas Bayes

An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances

Given the number of times in which an unknown event has happened and failed. Required the chance that the probability of its happening in a single trial lies somewhere between any two degrees of probability that can be named.

In meer symbolen: X is het aantal successen in n pogingen, x is de succeskans, r en s gegeven grenzen.

Wat is

$$P(r < x < s \mid X)$$

'de kans dat $r < x < s$, gegeven X'.

TU Delft
Delft University of Technology

Thomas Bayes

Het essay bevat Proposities waaruit de regel van Bayes afgeleid kan worden:

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Thomas Bayes

Bayes bepaalde hiermee de oplossing van zijn probleem voor binomiale verdelingen.

Na wat werk kwam hij uit op

$$P(r < x < s \mid X = p) = \frac{\int_r^s \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} \, \mathrm{d}x}{\int_0^1 \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} \, \mathrm{d}x}$$

Laplace: *Théorie analytique des probabilités*

Breidde Bayes' aanpak uit en gaf betere schattingen voor de kansen met behulp van de normale verdeling.

Toepassing: in 1745–1770 werden er in Parijs 251.527 jongens en 241.945 meisjes geboren.
Met zijn formules liet hij zien dat voor de kans, x, op een jongen geldt

$$P(x \leqslant \tfrac{1}{2}) \approx 1.15 \times 10^{-42}$$

Het was dus 'moreel zeker' dat de kans groter was dan $\frac{1}{2}$.

TUDelft
Delft University of Technology

Toepassingen

Andere toepassingen van Kansrekening

- Fouten in waarnemingen
- Lijfrentes
- Loterijen

Quetelet

Adolphe Quetelet. Een Belgisch wiskundige, astronoom, meteoroloog, socioloog, statisticus.

De uitvinder van “de gemiddelde man” .

Hij overdreef een beetje; hij zag overal de normale verdeling.
Hij de borstomvang van 5732 Schotse soldaten verzameld, de gemiddelde borstomvang was ongeveer 40 inches.

We hebben daar nu nog wat last van: de BMI is door de non-medicus Quetelet in elkaar gedraaid op zoek naar zijn normale verdelingen.

Delft University of Technology