# AM2520-H: Geschiedenis

## week 3.8, Maandag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 30 maart 2020

# Outline

# Cantor: bijecties

Vorige week dinsdag.

### Cantor (1878)

Er is een bijectie $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

De $x$-as en het vlak zijn even groot.

Er is zelfs een bijectie $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Er zijn evenveel reële getallen als rijen reële getallen.

# Peano: 1890

*Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*

**Stelling**

*Er is een continue functie* $t \mapsto \bigl(x(t), y(t)\bigr)$ *van* $[0,1]$ *naar* $[0,1]^2$*, een kromme dus, die surjectief is.*

Eerste pad van $(0,0)$ naar $(1,1)$.
Dan $(0,0) \to (\frac{1}{3},\frac{1}{3}) \to (0,\frac{2}{3}) \to (\frac{1}{3},1) \to (\frac{2}{3},\frac{2}{3}) \to (\frac{1}{3},\frac{1}{3}) \to (\frac{2}{3},0) \to (1,\frac{1}{3}) \to (\frac{2}{3},\frac{2}{3}) \to (1,1)$
met gebruik van het vorige pad (geschaald met factor $\frac{1}{3}$).

# Dimensie

Cantor in een brief aan Dedekind:
"Dit zet de notie van dimensie op losse schroeven"

Delft University of Technology

# Dimensie

Hoezo?

Men dacht op twee manieren over dimensie:

Een object in $\mathbb{R}^n$ heeft dimensie $k$

- als er $k$ variabelen nodig zijn om het te parametriseren, of
- als er $n - k$ onafhankelijke voorwaarden nodig zijn om het te bepalen.

# Dimensie

Voorbeelden in $\mathbb{R}^3$

- (opper)vlak: twee parameters, één voorwaarde (vergelijking)
- lijn/kromme: één parameter, twee voorwaarden (vergelijkingen)

# Dimensie

In de Lineaire Algebra is het een stelling dat beide dimensies gelijk zijn, voor lineaire deelruimten.

De Impliciete-functiestelling uit Analyse 2 zegt in feite dat dit ook zo is voor verzamelingen die je krijgt door niveau-oppervlakken te snijden.

# Dimensie

Zowel Cantor als Peano parametriseerden $[0,1]^2$ met één parameter.

Antwoord van Dedekind aan Cantor: "Uw parametrisering is verre van continu"

Peano's parametrisering is niet injectief.

De voorbeelden uit de Lineaire Algebra en Analyse 2 leveren parametriseringen die bijectief zijn (en zelfs continu differentieerbaar).

# Dimensie

Maar goed, er zat nog ruimte tussen de voorbeelden van Cantor en Peano aan de ene kant en de stellingen aan de andere kant.

**De grote vraag**

Als $m \neq n$ is er dan een continue bijectie tussen $[0,1]^m$ en $[0,1]^n$?
Tussen $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$?

Waarom continu?
Omdat continuïteit het basisbegrip bleek.

# Topologische begrippen

Cantor was een van de eersten die topologische begrippen invoerde.

## Verdichtingspunt

Een punt $x$ is verdichtingspunt van de verzameling $A$ (in $\mathbb{R}^n$) als voor elke $r > 0$ er een punt $a \in A$ is met $0 < \|x - a\| < r$.

## Afgeleide verzameling

Als $A \subseteq \mathbb{R}^n$ dan is $A'$ de verzameling van alle verdichtingspunten van $A$, de afgeleide verzameling van $A$.

# Topologische begrippen

Cantor definieerde ‘gesloten verzameling’ via verdichtingspunten.

### Gesloten verzameling

Een verzameling, $A$, is gesloten als elk verdichtingspunt van $A$ tot $A$ behoort, dus als $A' \subseteq A$

### Perfecte verzameling

Een verzameling, $A$, is perfect als deze gesloten is en als elk punt van $A$ ook verdichtingspunt van $A$ is, dus als $A' = A$.

# Topologische begrippen

Deze begrippen blijven bewaard onder continue bijecties waarvan de inversen ook continu zijn.

## Definitie

Twee metrische ruimten heten *homeomorf* als er een continue bijectie tussen de ruimten is waarvan de inverse ook continu is.

## De grote vraag

Zijn $[0,1]^m$ en $[0,1]^n$ alléén homeomorf als $m = n$?
Zijn $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$ alléén homeomorf als $m = n$?

TUDelft
Delft University of Technology

# $m = 1,\ n = 2$

Stelling van Cantor:

**Stelling**

$\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}^2$ *zijn niet homeomorf. Idem voor* $[0,1]$ *en* $[0,1]^2$.

**Bewijs.**

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ is *niet* samenhangend.
$\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$ is *wel* samenhangend. $\square$

# Andere $m$ en $n$?

De andere gevallen bleken een stuk lastiger.
Tot rond 1910.

**Stelling (L. E. J. Brouwer)**

*Als $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continu en injectief is dan is $f[\mathbb{R}^n]$ open.*

Het bewijs opende een heel nieuw vakgebied: Topologie (AM3590)

# Een belangrijke stelling

**Stelling (uit Analyse 1 en 2)**

*Neem aan $A \subseteq \mathbb{R}^n$ is gesloten en begrensd en $f : A \to \mathbb{R}$ is continu.*
*Dan neem $f$ op $A$ een maximum en een minimum aan.*

Wat is het belangrijke ingrediënt in het bewijs?

# Een belangrijke stelling

Bijvoorbeeld

**Stelling (Bolzano-Weierstraß)**

*Elke begrensde oneindige deelverzameling van* $\mathbb{R}^n$ *heeft een verdichtingspunt.*

of . . .

# Een belangrijke stelling

...

**Stelling (Heine-Borel)**

*Elke gesloten en begrensde deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ is compact.*

En compact betekent:

Elke open overdekking heeft een eindige deeloverdekking.

# Maurice Fréchet

Fréchet begon deze ingrediënten in algemene situaties te bestuderen en definieerde abstracte limietstructuren en metrische ruimten.

De reden:
dan hoeft men niet iedere nieuwe situatie opnieuw dezelfde dingen te bewijzen.

Delft University of Technology

# Extremen zoeken

Bijvoorbeeld.

In metrische ruimten zijn de Bozano-Weierstraß-eigenschap en compactheid equivalent.

Dus als $f : X \to \mathbb{R}$ continu is en $X$ is compact dan neemt $f$ op $X$ een maximum en een minimum aan.

Zodra je weet dat je ruimte compact is kun je je op het echte probleem concentreren: zit daar continuïteit in?

Zo ja: klaar; er zijn maxima en minima.
(Die zijn soms moeilijk te vinden, maar je weet dat er iets te vinden is.)

Delft University of Technology

# Bekend voorbeeld

Onder alle krommen van een gegeven lengte $L$, welke sluit de grootste oppervlakte in?

De meeste oplossingen beginnen: als het niet de cirkel is dan kan het nog iets groter.

Denkfout: gaat voorbij aan het feit dat niet is vastgesteld dat er een maximum is.

Oplossing: zorg dat je verzameling krommen compact is en dat ‘de ingesloten oppervlakte’ een continue functie is.

Delft University of Technology

# Felix Hausdorff

Een zeer invloedrijk boek: *Grundzüge der Mengenlehre* (1914)

Hausdorff ging nog een stap verder en stelde het begrip ‘omgeving’ centraal.

Er zijn situaties waar geen metrieken voorhanden zijn maar wel omgevingen.

Ook daar geldt de stelling over extremen nog steeds.

# Differentiaal- en integraalvergelijkingen

Uit de cursus *Differentiaalvergelijkingen*.

Het beginwaardeprobleem

$$y' = f(x, y) \qquad \text{met} \qquad y(x_0) = y_0$$

heeft unieke oplossingen als $f$ aan zekere (Lipschitz-)voorwaarden voldoet.

Het bewijs hiervan verloopt veelal via deze integraalvergelijking:

$$\varphi(x) - y_0 = \int_{x_0}^{x} f\bigl(t, \varphi(t)\bigr)\, \mathrm{d}t$$

# Differentiaal- en integraalvergelijkingen

Ook hier werd al gauw duidelijk dat heel vaak hetzelfde gebeurde.

Dat werd in Polen opgepikt.

Delft University of Technology

# Stefan Banach

Proefschrift: *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*

Ook Banach had geen zin iedere keer opnieuw hetzelfde te bewijzen.

> Toutefois, afin de ne pas être obligé à les démontrer isolément pour chaque champ particulier, ce qui serait bien pénible, j'ai choisi une voie différente que voici: je considère d'une façon générale les ensembles d'éléments dont je postule certaines propriétés, j'en déduis des théorèmes et je démotre ensuite de chaque champ fonctionnel particulier que les postulats adoptés sont vrais pour lui.

# Stefan Banach

Banach definieerde vectorruimten (niet als eerste maar deze keer werd het opgemerkt) en normen.

En hij nam de volledigheid op als axioma en daarom heten volledige genormeerde vectorruimten nu *Banachruimten*.

En hij gaf een lange lijst voorbeelden.

# Stefan Banach

- Continue functies met de supremumnorm
- Lebesgue-integreerbare functies, met norm $\|\cdot\|_1$
- Functies waarvan een vaste macht (de $p$-de macht) integreerbaar is, met norm $\|\cdot\|_p$
- Begrensde meetbare functies, met norm $\|\cdot\|_\infty$

# Conclusie

Dit is iets wat in de twintigste eeuw steeds meer gebeurde.

Men merkte op dat 'hetzelfde' op meer dan één plek werd gedaan en maakte er een definitie van.

**Stefan Banach**

"A mathematician is a person who can find analogies between theorems; a better mathematician is one who can see analogies between proofs and the best mathematician can notice analogies between theories. One can imagine that the ultimate mathematician is one who can see analogies between analogies."