

AM2520-H: Het Begin

week 1.1, maandag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 31 augustus 2020

Outline

Prehistorie

Egypte

Een paar opgaven

Mesopotamië

Voordrachten

Prelude

Prehistorie van de wiskunde.

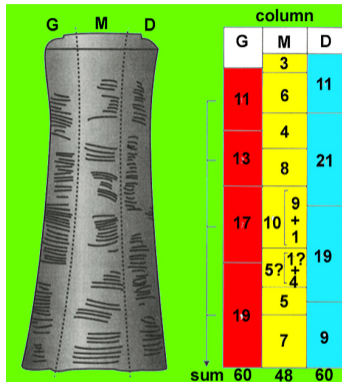
- ▶ $\sim 1.000.000$ BC: evolutie van de mens
- ▶ ~ 20.000 BC: getallen

Getallen?



Het Ishango-botje (Oeganda/Congo)

Getallen?



Interpretatie van de krassen

Leesopdracht voor morgen: een artikel over het botje uit *Mathematical Intelligencer*

Prelude

Prehistorie van de wiskunde.

- ▶ ~ 1.000.000 BC: evolutie van de mens
- ▶ ~ 20.000 BC: getallen
- ▶ ~ 1.000.000 BC: schrift/berekeningen (Egypte, Mesopotamië)

Egypte

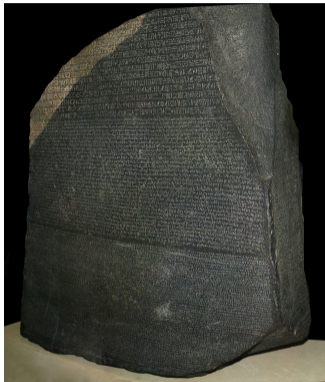


Egypte

30 dynastieën, verdeeld over:

- ▶ Early Dynastic Period of Egypt: 31st - 27th centuries BC
- ▶ Old Kingdom of Egypt: 27th - 22nd centuries BC
- ▶ First Intermediate Period: 22nd - 21st centuries BC
- ▶ Middle Kingdom of Egypt: 21st - 17th centuries BC
Rhind papyrus, Moscow papyrus
- ▶ Second Intermediate Period: ca. 1640 - 1570 BC
- ▶ New Kingdom of Egypt: 1570 - 1070 BC
- ▶ Third Intermediate Period: 1070 - 664 BC
- ▶ Late Period of ancient Egypt: 664 - 332 BC
- ▶ Grieks/Romeinse periode: 332 BC - 395 AD

Steen van Rosetta



Van boven naar beneden: Hiëroglfen, Demotisch, (Oud-)Grieks
en de vertaler: Jean-François Champollion

Getallen

| Hieroglyphic | | | Hieroglyphic | | |
|--------------|--|------------|--------------|-----------|-------------|
| 1 | | <i>wa</i> | 10 | ∩ | <i>mD</i> |
| 2 | | <i>sn</i> | 20 | ∩∩ | <i>Dwt</i> |
| 3 | | <i>xmt</i> | 30 | ∩∩∩ | <i>mabA</i> |
| 4 | | <i>fdn</i> | 40 | ∩∩∩∩ | <i>Hrw</i> |
| 5 | | <i>dj</i> | 100 | ∩∩∩∩∩ | <i>Sn.t</i> |
| 6 | | <i>sjs</i> | 1000 | ∩∩∩∩∩∩ | <i>xA</i> |
| 7 | | <i>sfx</i> | 10,000 | ∩∩∩∩∩∩∩ | <i>Dbw</i> |
| 8 | | <i>xmn</i> | 100,000 | ∩∩∩∩∩∩∩∩ | <i>Hfn</i> |
| 9 | | <i>psD</i> | 1,000,000 | ∩∩∩∩∩∩∩∩∩ | <i>HH</i> |

Tientallig, maar niet positioneel.

Het Rhind Papyrus



Een oud wiskundeboek

Vermenigvuldigen

Bepaal 14×80 .

| | |
|--------|------|
| . | 80 |
| \10 | 800 |
| 2 | 160 |
| \4 | 320 |
| Totaal | 1120 |

Delen

Bepaal $30 : 2\frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{r} . \quad 2\bar{2} \\ \backslash 10 \quad 25 \\ \backslash 2 \quad 5 \\ \text{Totaal} \quad 12 \end{array}$$

Dit ziet er meer uit als nagaan dat 12 het juiste quotiënt is.

Opgave 6

$$\begin{array}{r} . \quad \overline{3530} \\ \backslash 2 \quad \overline{131030} \\ 4 \quad \overline{3210} \\ \backslash 8 \quad \overline{75} \end{array}$$

In totaal 9 broden. Dat is het.

Er moesten negen broden over tien mannen verdeeld worden.

Eigenlijk wordt hier de vermenigvuldiging

$$10 \times \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{30} \right)$$

uitgewerkt. Want ...

Egyptische breuken

De Egyptenaren werkten eigenlijk alleen met breuken van de vorm $\frac{1}{n}$.

De notatie daarvoor was dus \bar{n} .

Veelgebruikte breuken met teller 2 werden met twee strepen geschreven: $\frac{2}{3} = \overline{\overline{3}}$
bijvoorbeeld.

Op het papyrus staat een tabel voor \bar{n} voor alle oneven n tot en met 101.

Opgave 27

Een hoeveelheid, met zijn $\bar{5}$ erbij wordt 21.

| | | |
|-----------|------------|-----------|
| . | 5 | |
| $\bar{5}$ | 1 | Totaal 6 |
| \. | 6 | |
| \2 | 12 | |
| $\bar{2}$ | 3 | Totaal 21 |
| \. | $3\bar{2}$ | |
| 2 | 7 | |
| \4 | 14 | |

Methode van 'false position': begin met iets, hier 5, met een makkelijke $\frac{1}{5}$, namelijk 1. Kijk hoe vaak 6 in 21 gaat; zo vaak gaat 5 in de hoeveelheid.

Opgave 50

Een rond veld met een diameter van 9 khet. Wat is de oppervlakte?

Neem $\frac{1}{9}$ weg van de diameter, dat is 1; de rest is 8.

Vermenigvuldig 8 met 8; dat maakt 64. Je hebt dus 64 setat land.

Doe het zo

$$\begin{array}{r} 1 \\ \frac{1}{9} \end{array} \quad \begin{array}{r} 9 \\ 1 \end{array}$$

dit weggenomen laat 8 over

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 4 \\ \backslash 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ 16 \\ 32 \\ 64 \end{array}$$

De oppervlakte is 64 setat

Waar komt die regel vandaan?

Mogelijkheid 1.

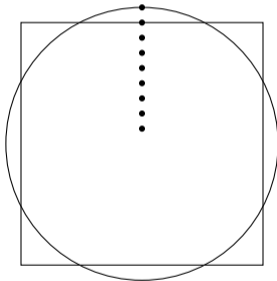
Er passen net 64 balletjes met diameter 1 op een schoteltje met diameter 9.

Zie de YouTube-video met Marcus Du Sautoy op Brightspace

Waar komt die regel vandaan?

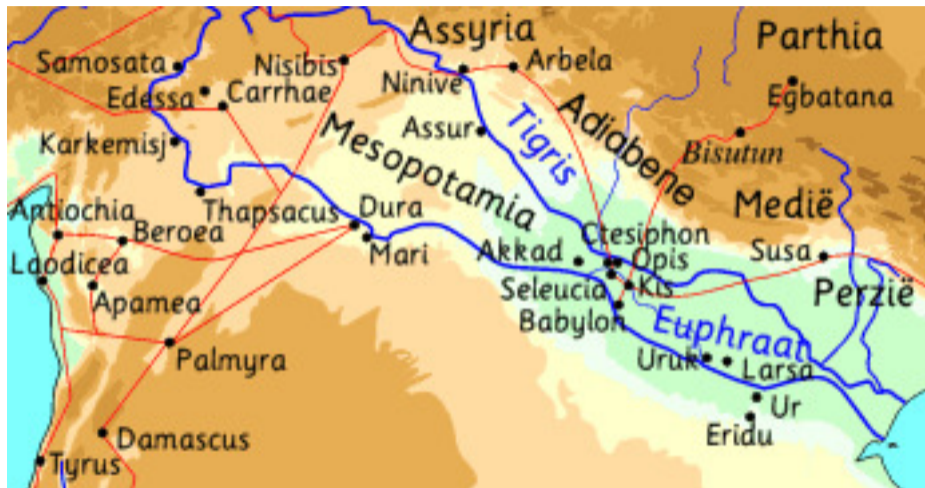
Mogelijkheid 2.

Rhind, opgave 48: de verhouding van de oppervlakten van een cirkel met diameter 9 en het omschreven vierkant is gelijk aan $\frac{64}{81}$.



Teken het op milimeterpapier en tel de hokjes; bijna geen verschil.

Wiskunde in het oude Mesopotamië



Bronnen

Kleitabletten in spijkerschrift, hoofdzakelijk uit 2000–1500 BC en 300–0 BC

- ▶ numerieke tabellen
- ▶ stelling van Pythagoras
- ▶ lineaire en kwadratische vergelijkingen

Sexagesimaal (60-tallig) stelsel

| | | | | | |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 𐎶 1 | 𐎶𐎵 11 | 𐎶𐎴 21 | 𐎶𐎳 31 | 𐎶𐎲 41 | 𐎶𐎱 51 |
| 𐎷 2 | 𐎷𐎵 12 | 𐎷𐎴 22 | 𐎷𐎳 32 | 𐎷𐎲 42 | 𐎷𐎱 52 |
| 𐎸 3 | 𐎸𐎵 13 | 𐎸𐎴 23 | 𐎸𐎳 33 | 𐎸𐎲 43 | 𐎸𐎱 53 |
| 𐎹 4 | 𐎹𐎵 14 | 𐎹𐎴 24 | 𐎹𐎳 34 | 𐎹𐎲 44 | 𐎹𐎱 54 |
| 𐎺 5 | 𐎺𐎵 15 | 𐎺𐎴 25 | 𐎺𐎳 35 | 𐎺𐎲 45 | 𐎺𐎱 55 |
| 𐎻 6 | 𐎻𐎵 16 | 𐎻𐎴 26 | 𐎻𐎳 36 | 𐎻𐎲 46 | 𐎻𐎱 56 |
| 𐎼 7 | 𐎼𐎵 17 | 𐎼𐎴 27 | 𐎼𐎳 37 | 𐎼𐎲 47 | 𐎼𐎱 57 |
| 𐎽 8 | 𐎽𐎵 18 | 𐎽𐎴 28 | 𐎽𐎳 38 | 𐎽𐎲 48 | 𐎽𐎱 58 |
| 𐎾 9 | 𐎾𐎵 19 | 𐎾𐎴 29 | 𐎾𐎳 39 | 𐎾𐎲 49 | 𐎾𐎱 59 |
| 𐎿 10 | 𐎿 20 | 𐎿 30 | 𐎿 40 | 𐎿 50 | |

Sexagesimaal (60-tallig) stelsel

Notatie (positioneel):

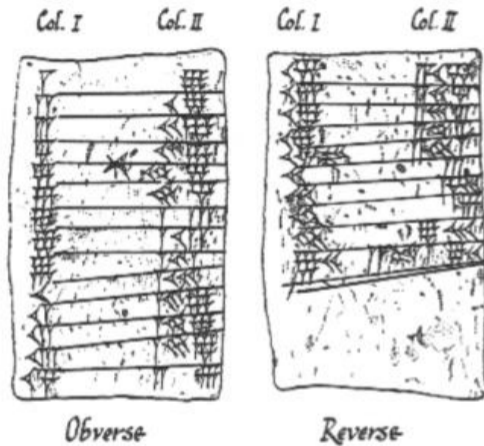
| | |
|-------|---------------------------|
| 72: | 1,12 |
| 3680: | 1,1,20 |
| 1/5: | 0;12 (soms ook gewoon 12) |

Dit is de moderne versie natuurlijk.

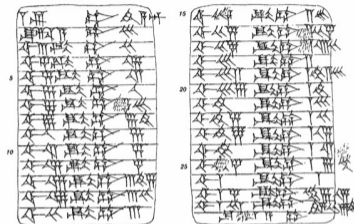
Er was nog niet meteen een nul; vaak werd die positie leeg gelaten.

(Dat is vragen om moeilijkheden.)

Tafel van 9



Reciproken

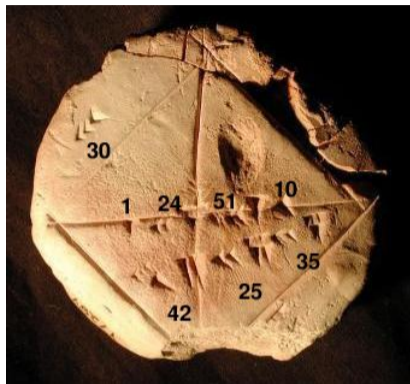


Two thirds of 1 is 0;40.
 Its half is 0;30.
 The reciprocal of 2 is 0;30.
 The reciprocal of 3 is 0;20.
 The reciprocal of 4 is 0;15.
 The reciprocal of 5 is 0;12.
 The reciprocal of 6 is 0;10.
 The reciprocal of 8 is 0;07 30.
 The reciprocal of 9 is 0;06 40.
 The reciprocal of 10 is 0;06.
 The reciprocal of 12 is 0;05.
 The reciprocal of 15 is 0;04.
 The reciprocal of 16 is 0;03 45.
 The reciprocal of 18 is 0;03 20.
 The reciprocal of 20 is 0;03.

The reciprocal of 24 is 0;02 30.
 The reciprocal of 25 is 0;02 24.
 The reciprocal of 27 is 0;02 13 20.
 The reciprocal of 30 is 0;02.
 The reciprocal of 32 is 0;01 52 30.
 The reciprocal of 36 is 0;01 40.
 The reciprocal of 40 is 0;01 30.
 The reciprocal of 45 is 0;01 20.
 The reciprocal of 48 is 0;01 15.
 The reciprocal of 50 is 0;01 12.
 The reciprocal of 54 is 0;01 06 40.
 The reciprocal of 1 00 is 0;01.
 The reciprocal of 1 04 is 0;00 56 15.
 The reciprocal of 1 21 is 0;00 44 26 40.
 <Its half>

Figure 9. MLC 1670, after Clay [7, no. 37].

Tablet YBC 7289

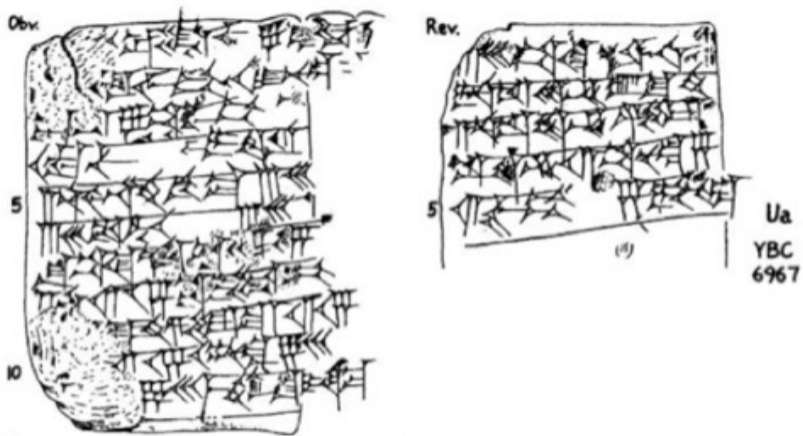


Hier staat: $\sqrt{2} \approx 1;24,51,10$.

De zijde van het vierkant is 30; de diagonaal is 42;25,35.

Reken maar na: $1;24,51,10 = 1,41421\overline{296}$, en $\sqrt{2} = 1,41421\overline{356} \dots$

Kwadratische vergelijkingen



YBC 6967

Wat staat er op YBC 6967?

Een reciproke overschrijdt zijn reciproke met 7. Wat zijn de reciproke en zijn reciproke?

Jij: breek de 7 waarmee de reciproke zijn reciproke overschrijdt zo dat $3;30$ (verschijnt).
Combineer $3;30$ en $3;30$ zo dat $12;15$ (verschijnt).

Tel $1,00$, de oppervlakte, op bij de $12;15$ die voor je verscheen zo dat $1,12;15$ (verschijnt).

Wat is de zijde van $1,12;15$? $8;30$.

Teken $8;30$ en $8;30$, zijn tegenhanger, en haal dan $3;30$, de helft, van de ene weg en voeg hem toe aan de andere.

De ene is 12 , de andere is 5 . De reciproke is 12 , zijn reciproke is 5 .

Wat staat er op YBC 6967?

Een reciproke overschrijdt zijn reciproke met 7. Wat zijn de reciproke en zijn reciproke?

$$xy = 60, \text{ en } x - y = 7$$

Jij: breek de 7 waarmee de reciproke zijn reciproke overschrijdt zo dat 3;30 (verschijnt). $(x - y)/2 = \frac{7}{2}$

Combineer 3;30 en 3;30 zo dat 12;15 (verschijnt). $((x - y)/2)^2 = 12\frac{1}{4}$

Tel 1,00, de oppervlakte, op bij de 12;15 die voor je verscheen zo dat 1,12;15 (verschijnt). $xy + ((x - y)/2)^2 = 72\frac{1}{2}$

Wat is de zijde van 1,12;15? 8;30. $\sqrt{xy + ((x - y)/2)^2} = 8\frac{1}{2}$

Teken 8;30 en 8;30, zijn tegenhanger, en haal dan 3;30, de helft, van de ene weg en voeg hem toe aan de andere. $\sqrt{xy + ((x - y)/2)^2} \pm (x - y)/2 = \frac{17}{2} \pm \frac{7}{2}$

De ene is 12, de andere is 5. De reciproke is 12, zijn reciproke is 5.

Plaatje tekenen

De meetkundige gang van zaken. (Tekenen je eigen plaatjes maar.)

Plimpton 322



Pythagorische drietallen

| <i>[ta]-ki-il-ti ši-li-ip-tim</i> | <i>[ša 1 in]-na-as-sà-ḫu-ma SAG i-il-lu-ū</i> | ÍB.SI ₈ SAG | ÍB.SI ₈ ši-li-ip-tim | MU.BI.IM |
|-----------------------------------|---|------------------------|---------------------------------|----------|
| (1) 59] 00 15 | | 1 59 | 2 49 | KI.1 |
| (1) 56 56] 58 14 50 06 15 | | 56 07 | 1 20 25 | KI.2 |
| (1) 55 07] 41 15 33 45 | | 1 16 41 | 1 50 49 | KI.3 |
| (1) 53 10 29 32 52 16 | | 3 31 49 | 5 09 01 | KI.4 |
| (1) 48 54 01 40 | | 1 05 | 1 37 | KI.[5] |
| (1) 47 06 41 40 | | 5 19 | 8 01 | [KI.6] |
| (1) 43 11 56 28 26 40 | | 38 11 | 59 01 | KI.7 |
| (1) 41 33 45 14 3 45 | | 13 19 | 20 49 | KI.8 |
| (1) 38 33 36 36 | | 8 01 | 12 49 | KI.9 |
| (1) 35 10 02 28 27 24 26 40 | | 1 22 41 | 2 16 01 | KI.10 |
| (1) 33 45 | | 45 | 1 15 | KI.11 |
| (1) 29 21 54 2 15 | | 27 59 | 48 49 | KI.12 |
| (1) 27 00 03 45 | | 2 41 | 4 49 | KI.13 |
| (1) 25 48 51 35 6 40 | | 29 31 | 53 49 | KI.14 |
| (1) 23 13 46 40 | | 28 | 53 | KI.15 |

Figure 3. Transliteration of Plimpton 322.

Hier staan Pythagorische drietallen.

Elke regel (een beetje geëxtrapoleerd) van rechts naar links:

Het nummer — c — b — het quotient van de grootste twee kwadraten

Regel 14: $c = 53,49 = 3229$, $b = 29,31 = 1771$ (en $a = \sqrt{c^2 - b^2} = 2700$) en dan $c^2/a^2 = 1;25,48,51,35,06,40 = 1,430238820$

En dan is er π



Interpretatie: $O = 3$ (de omtrek dus) en $A = 0;45$ (oppervlakte).

Modern: $2\pi r = 3$ en $\pi r^2 = \frac{45}{60}$; na elimineren van r volgt $\frac{45}{60} = \frac{9}{4\pi}$; dus $\pi = 3$.

Er zijn tabletten met $\pi \approx 3\frac{1}{8}$ (met ingeschreven zeshoek).

De $2/n$ -tabel

Voor een duo:

- ▶ Bewijs dat elke rationaal getal te schrijven is als som van 'Egyptische breuken', dus

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \dots + \frac{1}{n_k}$$

met $n_1 < n_2 < \dots < n_k$.

- ▶ Analyseer de $2/n$ -tabel: hoe zou die tot stand gekomen zijn, is hij optimaal?

Bendaderingen

Voor een eenling, kies uit

▶ $\sqrt{2} \approx 1;24,51,10$

▶ $\pi \approx 3;07,30$

Plimpton 322

Voor een duo:

- ▶ Hoe maakt men Pythagorische drietallen? $a = n^2 - m^2$, $b = 2nm$, $c = n^2 + m^2$.
- ▶ Analyseer Plimpton 322; hoe zou die gemaakt zijn?