AM2520-H: Astronomie - Trigonometrie

week 1.2, dinsdag

K. P. Hart

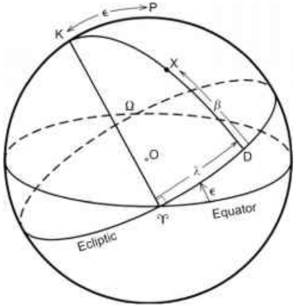
Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 8 september 2020

Outline

Banen van hemellichamen

De zon:



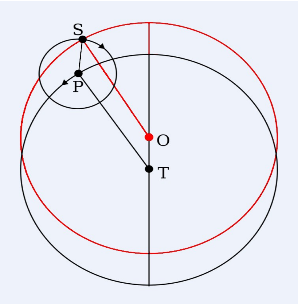
Evenaar en Ecliptica; ♈: lente-equinox, Ω: herfst-equinox, de zonnewendes staan hier niet.

Eratosthenes en Hipparchos: $\varepsilon \approx 24^\circ$;
Ptolemaeus: $\varepsilon \approx (23;51,20)^\circ = 23^\circ\,51'\,20''$

Banen van hemellichamen

Van de lente-equinox naar de zomerzonnewende duurt langer dan van de zonnewende naar de herfstequinox.

Twee equivalente verklaringen door Apollonius (262–190 BC)



De zon beweegt langs de deferent (de rode cirkel)
of: de zon beweegt langs een epicykel, bepaald door de twee zwarte cirkels.

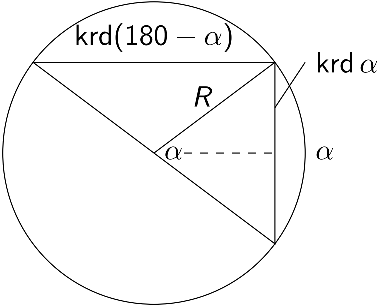
Banen van hemellichamen

Een deferent is een cirkel waarlangs een hemellichaam beweegt en waarvan het middelpunt niet op aarde ligt.

Epicykels werden bedacht om afwijkende bewegingen van hemellichamen toch uit cirkelbewegingen te laten bestaan.
De Fourier-analyse zegt dat dat geen slecht idee is ...

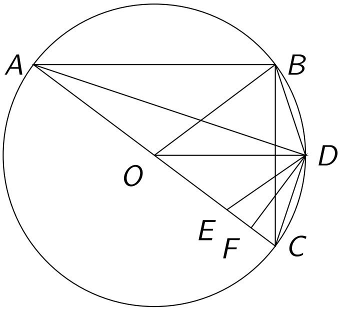
Hipparchos

- sterrencatalogus met sferische coordinaten
- parallaxmeting maan
- ontdekking precessie van de aardas
  de aardas beschrijft een kegel, elke 26.000 jaar
- sinustabel (in plaats van de sinus sprak Hipparchus van de *koorde*)



$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{krd}\,\alpha = R\sin\tfrac{1}{2}\alpha$$

Verdubbelingsformule



$\angle BOC = 2\alpha$

Bepaal E zó dat $AE = AB$

Neem F midden tussen E en C; dus
$CF = \frac{1}{2}(AC - AE) = \frac{1}{2}(AC - AB)$
Of $CF = \frac{1}{2}(2R - \text{krd}(180^\circ - 2\alpha))$
$\angle CAD = \frac{1}{2}\angle COD = \frac{1}{2}\angle DOB = \angle DAB$
Dus $DE = DB = DC$ en dus $DF \perp AC$

We vinden: $AC : CD = CD : CF$

Conclusie: $\text{krd}(\alpha)^2 = CD^2 = AC \cdot CF = 2R \cdot \frac{1}{2}(2R - \text{krd}(180^\circ - 2\alpha)$
Wat moderner: $(2R \sin \frac{1}{2}\alpha)^2 = R \cdot (2R - 2R \cos \alpha)$.

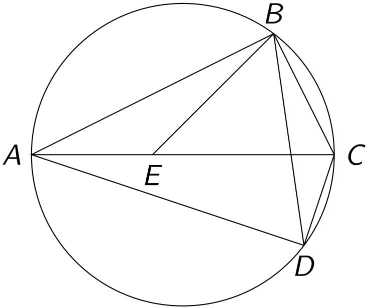
Met $R = 1$ hebben we $\text{krd}\, 60^\circ = 1$; zo maak je een koordentabel in stappen van $7^\circ\, 30'$.

Mathematische Syntax (*Almagest*, ca. 150)

- optelformule voor koorden
- koordentabel in stappen van $30'$
- boldriehoeksmeetkunde
- kwantitatief werk aan de banen van zon, maan, en de planeten

Ptolemaeus (100–170)

Stelling van Ptolemaeus



Er geldt: $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$

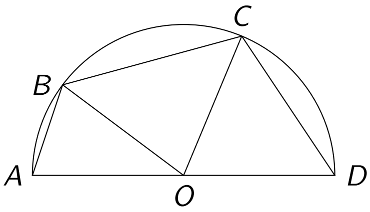
Bepaal E zó dat $\angle ABE = \angle DBC$

ABE en DBC zijn gelijkvormig dus
$AB : AE = BD : CD$

ABD en EBC zijn gelijkvormig dus
$BD : AD = BC : EC$

Uitwerken: $AC \cdot BD = (AE + EC) \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$

Optelformule voor koorden



Schrijf $\alpha = \angle AOC$ en $\beta = \angle AOB$

Pas $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$ toe:

$\operatorname{krd} \alpha \cdot \operatorname{krd}(180 - \beta) =$
$\operatorname{krd} \beta \cdot \operatorname{krd}(180 - \alpha) + 2 \operatorname{krd}(\alpha - \beta)$

Ofwel $2 \operatorname{krd}(\alpha - \beta) = \operatorname{krd} \alpha \cdot \operatorname{krd}(180 - \beta) - \operatorname{krd} \beta \cdot \operatorname{krd}(180 - \alpha)$

En dan volgt: $\sin(\gamma - \delta) = \sin \gamma \, \cos \delta - \cos \gamma \, \sin \delta$

NB: de sinus is de halve koorde van de dubbele hoek.

Koordentabel

Hoe maken we nu de tabel?

- krd 72° via stellingen uit de *Elementen*
- krd 12° uit krd$(72^\circ - 60^\circ)$ (zie hierboven)
- krd $1^\circ\,30'$ via verdubbeling (halvering dus)
- krd $30'$ via schatten en insluiten

Waarom kan krd $30'$ niet exact met passer en liniaal?

Koordentabel

ΚΑΝΟΝΙΟΝ ΤΩΝ ΕΝ ΚΥΚΛΩ ΕΥΘΕΙΩΝ									ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΩΝ ΧΟΡΔΩΝ								
ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΩΝ		ΕΥΘΕΙΩΝ			ΕΞΗΚΟΣΤΩΝ				ΤΟΞΩΝ		ΧΟΡΔΩΝ			ΕΞΗΚΟΣΤΩΝ			
Μοιρῶν		Μ	Π	Δ	Μ	Π	Δ	Τ	Μοιρῶν		Μ	Π	Δ	Μ	Π	Δ	Τ
ō	ς''	ō	λα	κε	ō	α	β	ν	0	30	0	31	25	0	1	2	50
α	ō	α	β	ν	ō	α	β	ν	1	0	1	2	50	0	1	2	50
α	ς''	α	λδ	ιε	ō	α	β	ν	1	30	1	34	15	0	1	2	50
β	ō	β	ε	μ	ō	α	β	ν	2	0	2	5	40	0	1	2	50
β	ς''	β	λζ	δ	ō	α	β	μη	2	30	2	37	4	0	1	2	48
γ	ō	γ	η	κη	ō	α	β	μη	3	0	3	8	28	0	1	2	48
γ	ς''	γ	λθ	νβ	ō	α	β	μη	3	30	3	39	52	0	1	2	48
δ	ō	δ	ια	ις	ō	α	β	μζ	4	0	4	11	16	0	1	2	47
δ	ς''	δ	μβ	μ	ō	α	β	μζ	4	30	4	42	40	0	1	2	47
ε	ō	ε	ιδ	δ	ō	α	β	μς	5	0	5	14	4	0	1	2	46
ε	ς''	ε	με	κζ	ō	α	β	με	5	30	5	45	27	0	1	2	45
ς	ō	ς	ις	μθ	ō	α	β	μδ	6	0	6	16	49	0	1	2	44
ς	ς''	ς	μη	ια	ō	α	β	μγ	6	30	6	48	11	0	1	2	43
ζ	ō	ζ	ιθ	λγ	ō	α	β	μβ	7	0	7	19	33	0	1	2	42
ζ	ς''	ζ	ν	νδ	ō	α	β	μα	7	30	7	50	54	0	1	2	41
η	ō	η	κβ	ιε	ō	α	β	μ	8	0	8	22	15	0	1	2	40
η	ς''	η	νγ	λε	ō	α	β	λθ	8	30	8	53	35	0	1	2	39
θ	ō	θ	κδ	νδ	ō	α	β	λη	9	0	9	24	54	0	1	2	38
θ	ς''	θ	νς	ιγ	ō	α	β	λζ	9	30	9	56	13	0	1	2	37
ι	ō	ι	κζ	λβ	ō	α	β	λε	10	0	10	27	32	0	1	2	35
ι	ς''	ι	νη	μθ	ō	α	β	λγ	10	30	10	58	49	0	1	2	33
ια	ō	ια	λ	ε	ō	α	β	λβ	11	0	11	30	5	0	1	2	32
ια	ς''	ιβ	α	κα	ō	α	β	λ	11	30	12	1	21	0	1	2	30
ιβ	ō	ιβ	λβ	λς	ō	α	β	κη	12	0	12	32	36	0	1	2	28
ιβ	ς''	ιγ	γ	ν	ō	α	β	κζ	12	30	13	3	50	0	1	2	27
ιγ	ō	ιγ	λε	δ	ō	α	β	κε	13	0	13	35	4	0	1	2	25
ιγ	ς''	ιδ	ς	ις	ō	α	β	κγ	13	30	14	6	16	0	1	2	23
ιδ	ō	ιδ	λζ	κζ	ō	α	β	κα	14	0	14	37	27	0	1	2	21
ιδ	ς''	ιε	η	λη	ō	α	β	ιθ	14	30	15	8	38	0	1	2	19
ιε	ō	ιε	λθ	μζ	ō	α	β	ιζ	15	0	15	39	47	0	1	2	17
ιε	ς''	ις	ι	νς	ō	α	β	ιε	15	30	16	10	56	0	1	2	15
ις	ō	ις	μβ	γ	ō	α	β	ιγ	16	0	16	42	3	0	1	2	13
ις	ς''	ιζ	ιγ	θ	ō	α	β	ι	16	30	17	13	9	0	1	2	10
ιζ	ō	ιζ	μδ	ιδ	ō	α	β	ζ	17	0	17	44	14	0	1	2	7
ιζ	ς''	ιη	ιε	ιζ	ō	α	β	ε	17	30	18	15	17	0	1	2	5
ιη	ō	ιη	μς	ιθ	ō	α	β	β	18	0	18	46	19	0	1	2	2

ΚΑΝΟΝΙΟΝ ΤΩΝ ΕΝ ΚΥΚΛΩ ΕΥΘΕΙΩΝ									ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΩΝ ΧΟΡΔΩΝ								
ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΩΝ		ΕΥΘΕΙΩΝ			ΕΞΗΚΟΣΤΩΝ				ΤΟΞΩΝ		ΧΟΡΔΩΝ			ΕΞΗΚΟΣΤΩΝ			
Μοιρῶν		Μ	Π	Δ	Μ	Π	Δ	Τ	Μοιρῶν		Μ	Π	Δ	Μ	Π	Δ	Τ
ιη	ς''	ιθ	ιζ	κα	ō	α	β	ō	18	30	19	17	21	0	1	2	0
ιθ	ō	ιθ	μη	κα	ō	α	α	νζ	19	0	19	48	21	0	1	1	57
ιθ	ς''	κ	ιθ	ιθ	ō	α	α	νδ	19	30	20	19	19	0	1	1	54
κ	ō	κ	ν	ις	ō	α	α	να	20	0	20	50	16	0	1	1	51
κ	ς''	κα	κα	ιβ	ō	α	α	μη	20	30	21	21	12	0	1	1	48
κα	ō	κα	νβ	ς	ō	α	α	με	21	0	21	52	6	0	1	1	45
κα	ς''	κβ	κβ	νη	ō	α	α	μβ	21	30	22	22	58	0	1	1	42
κβ	ō	κβ	νγ	μθ	ō	α	α	λθ	22	0	22	53	49	0	1	1	39
κβ	ς''	κγ	κδ	λθ	ō	α	α	λς	22	30	23	24	39	0	1	1	36
κγ	ō	κγ	νε	κζ	ō	α	α	λγ	23	0	23	55	27	0	1	1	33
κγ	ς''	κδ	κς	ιγ	ō	α	α	λ	23	30	24	26	13	0	1	1	30
κδ	ō	κδ	νς	νη	ō	α	α	κς	24	0	24	56	58	0	1	1	26
κδ	ς''	κε	κζ	μα	ō	α	α	κβ	24	30	25	27	41	0	1	1	22
κε	ō	κε	νη	κβ	ō	α	α	ιθ	25	0	25	58	22	0	1	1	19
κε	ς''	κς	κθ	α	ō	α	α	ιε	25	30	26	29	1	0	1	1	15
κς	ō	κς	νθ	λη	ō	α	α	ια	26	0	26	59	38	0	1	1	11
κς	ς''	κζ	λ	ιδ	ō	α	α	η	26	30	27	30	14	0	1	1	8
κζ	ō	κη	ō	μη	ō	α	α	δ	27	0	28	0	48	0	1	1	4
κζ	ς''	κη	λα	κ	ō	α	α	ō	27	30	28	31	20	0	1	1	0
κη	ō	κθ	α	ν	ō	α	ō	νς	28	0	29	1	50	0	1	0	56
κη	ς''	κθ	λβ	ιη	ō	α	ō	νβ	28	30	29	32	18	0	1	0	52
κθ	ō	λ	β	μδ	ō	α	ō	μη	29	0	30	2	44	0	1	0	48
κθ	ς''	λ	λγ	η	ō	α	ō	μδ	29	30	30	33	8	0	1	0	44
λ	ō	λα	γ	λ	ō	α	ō	μ	30	0	31	3	30	0	1	0	40
λ	ς''	λα	λγ	ν	ō	α	ō	λε	30	30	31	33	50	0	1	0	35
λα	ō	λβ	δ	ζ	ō	α	ō	λα	31	0	32	4	7	0	1	0	31
λα	ς''	λβ	λδ	κβ	ō	α	ō	κζ	31	30	32	34	22	0	1	0	27
λβ	ō	λγ	δ	λε	ō	α	ō	κβ	32	0	33	4	35	0	1	0	22
λβ	ς''	λγ	λδ	μς	ō	α	ō	ιζ	32	30	33	34	46	0	1	0	17
λγ	ō	λδ	δ	νε	ō	α	ō	ιβ	33	0	34	4	55	0	1	0	12
λγ	ς''	λδ	λε	α	ō	α	ō	η	33	30	34	35	1	0	1	0	8
λδ	ō	λε	ε	ε	ō	α	ō	γ	34	0	35	5	5	0	1	0	3
λδ	ς''	λε	λε	ς	ō	ō	νθ	νζ	34	30	35	35	6	0	0	59	57
λε	ō	λς	ε	ε	ō	ō	νθ	νβ	35	0	36	5	5	0	0	59	52
λε	ς''	λς	λε	α	ō	ō	νθ	μη	35	30	36	35	1	0	0	59	48
λς	ō	λζ	δ	νε	ō	ō	νθ	μγ	36	0	37	4	55	0	0	59	43

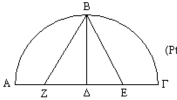
A.G.A - "Claudiou Ptolemaeou - Mathematike Syntaxis" (Vol. 1, pp. 118-119 - 9 June 2007). The pages above are two out of a total ten of Ptolemy's famous trigonometric "Table of Chords" (from 0 to 180 deg., every 0.5 deg.). The original ancient Greek text of Ptolemy is on the left of the pages.

CLAUDIOS PTOLEMAEOS MATHEMATIKE SYNTAXIS

(Ptolemy's "Almagest" - 1.9.14)

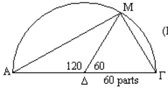
First line: ΚΑΝΟΝΙΟΝ ΤΩΝ ΕΝ ΚΥΚΛΩ ΕΥΘΕΙΩΝ
= Table of the straight lines in a circle (= Table of Chords)
Second line: ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΩΝ - ΕΥΘΕΙΩΝ - ΕΞΗΚΟΣΤΩΝ
= Arcs - Chords - Difference in the increase of Chords (1/60)

The Table of Chords is based on ancient Greek geometry and the shapes we create using only a straightedge and a compass... In this example we write a circle ΑΒΓ = 360 parts-degrees with diameter ΑΓ = 120 parts, and we bring the verical ΔΒ = 60 parts. We bisect ΔΓ at E and take EZ = EB = √4500



(Ptol. 1.9.2)

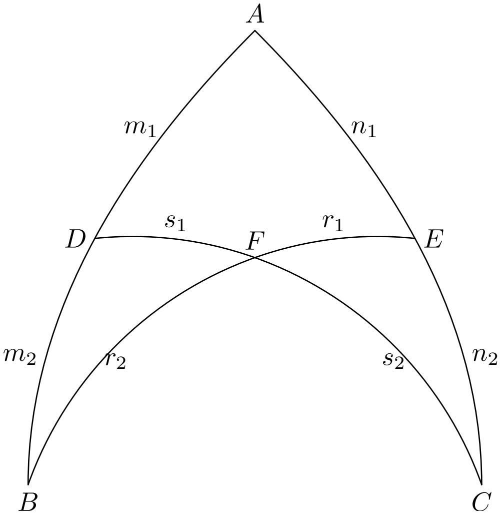
Now, ZΔ = 37 parts 4' 55", the side of a decagon (θ = 36 deg), and BZ = 70 parts 32' 3", the side of a pentagon (θ = 72 deg).



(Ptol. 1.9.4)

If, for example, θ = 60 deg., the chord ΓM is 60 parts = 1. Then the chord AM of the supplementary angle AΔM = 120 deg. is 103 parts 55' 23". [*The angle AMΓ is a right angle, because every angle inscribed in a circle that goes to the diameter is a right angle].

Bolcoördinaten



Stelling van Menelaeus (ca. 100 BC)

$$\frac{\sin(n_1 + n_2)}{\sin n_1} = \frac{\sin(s_1 + s_2)}{\sin s_1} \cdot \frac{\sin r_1}{\sin(r_1 + r_2)}$$

NB De lijnen zijn bogen op het boloppervlak en het gaat op de bij de kromme lijnstukken horende hoeken.

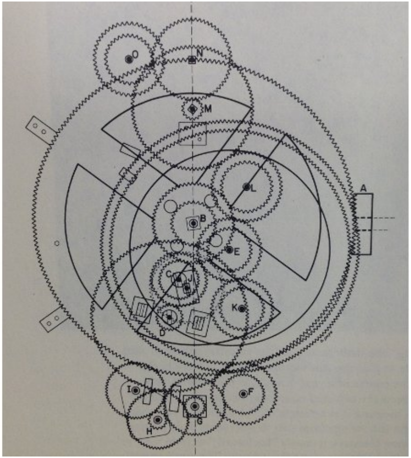
Ptolemaeus gebruikte dit bij berekeningen van daglengten, afstanden, etc.

Nog veel meer

- opkomst en ondergang zon
- verduisteringen
- hemelposities planeten
- berekening eccenter
- verhouding radii deferent/epicykel

	Ptolemaeus	werkelijk
Mercurius	0.375	0.387
Venus	0.720	0.723
Mars	1.520	1.524
Jupiter	5.21	5.203
Saturnus	9.17	9.539

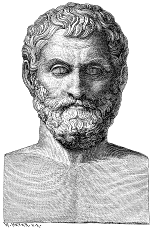
Het mechaniek



De Griekse wereld

Abb. 2.1.0
Griechisch-hellenistische Antike:
Geburtsorte und Wirkungsstätten
ausgewählter Mathematiker (rot)

Thales van Milete (624–546 BC)



“Thales, de grondlegger van dit type filosofie, zegt dat de hoofdzaak (arché) water is” (Aristoteles, Metafysica A26)

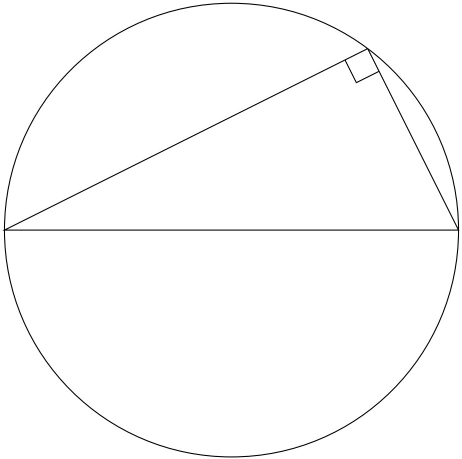
“... de meetkunde was eerst ontdekt door de Egyptenaren, oorspronkelijk bij het meten van oppervlakten.
(...) Thales was de eerste die naar Egypte ging en deze discipline mee terugnam naar Griekenland.” (Proclus (410–485 nC), On geometry)

“Pamphila zegt dat, nadat hij de meetkunde van de Egyptenaren had geleerd, hij de eerste was die een rechthoekige driehoek in een circle beschreef ...”
(Diogenes Laertius (3de eeuw nC), Lifes of eminent philosophers)

Hier zien we een verschuiving van praktijk naar theorie.

Stelling van Thales

Die kennen we allemaal, toch . . . ?

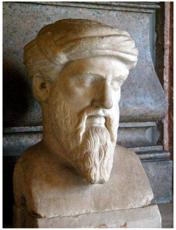


Pythagoras van Samos (585–500 BC)

"Apollodorus de rekenaar vertelt ons dat een os offerde nadat hij gevonden had dat in een rechthoekige driehoek het vierkant op de hypothenuse gelijk is aan de vierkanten op de zijden die de rechte hoek insluiten"

(Diogenes Laertius (3.eeuw n.Chr.) Lifes of Eminent Philosophers)

Maar, heeft hij echt bestaan?



Busto di Pitagora. Copia romana di originale greco. Musei Capitolini, Roma.

Alles is getal

"... the so-called Pythagoreans, who were the first to take up mathematics, ... they thought its principles were the principles of all things. Since of these principles numbers are by nature the first, and in numbers they seemed to see many resemblances to the things that exist and come into being — more than in fire and earth and water (such and such a modification of numbers being justice, another being soul and reason, another being opportunity — and similarly almost all other things being numerically expressible); since, again, they saw that the modifications and the ratios of the musical scales were expressible in numbers; since, then, all other things seemed in their whole nature to be modelled on numbers, and numbers seemed to be the first things in the whole of nature, they supposed the elements of numbers to be the elements of all things, and the whole heaven to be a musical scale and a number." (Aristoteles, Metafysica, A5)

Pythagorische getaltheorie

1. onderscheid even/oneven (Euclides, *Elementen* IX.23)
2. figuurlijke getallen
3. ‘perfecte’ getallen
4. ‘pythagorische verhoudingsgelijkheid’

Pythagorische verhoudingsgelijkheid

- Def 1: A unit is that by virtue of which each of the things that exist is called one.
- Def 2: A number is a multitude composed of units.
- Def 3: A number is a part of a number, the less of the greater, when it measures the greater;
- Def 4: But parts when it does not measure it.
- Def 20: Numbers are proportional when the first is the same multiple, or the same part, or the same parts, of the second that the third is of the fourth. (Euclides, *De Elementen*, boek VII)

Wat staat daar?

$a : b \equiv c : d$ als er m, n, x, en y zijn zó dat $a = mx$ en $b = nx$, en $c = my$ en $d = ny$.

En dus als $ad = bc$ (maar dat staat er niet).

Pythagorische getaltheorie

1. onderscheid even/oneven (Euclides, *Elementen* IX.23)
2. figuurlijke getallen
3. ‘perfecte’ getallen
4. ‘pythagorische verhoudingsgelijkheid’
5. systematisch gebruik van het ‘Euclidische algorithme’
   (alternerend aftrekken, anthyphairesis) (Euclides, *Elementen* VII.2)
6. priem en relatief priem
   ‘oneindigheid’ van de priemgetallen (Euclides, *Elementen* IX.20)

Incommensurabiliteit

Twee grootheden zijn commensurabel als er een derde grootheid is die een geheel aantal maal in beide past.

Symbolisch: a en b zijn commensurabel als er een x is en m en n zó dat $a = mx$ en $b = nx$.

Hoe bepaal je die x (en de m en de n)?

Algoritme van Euclides: herhaald de kleinste van de grootste aftrekken (antihypairesis).

Incommensurabiliteit

In de meetkunde zijn er situaties waar 'anthyphairesis' niet stopt.

zijde en diagonaal van een vierkant of
zijde en diagonaal van een regelmatige vijf-hoek

Dan zijn de dingen waar je mee begint *niet* commensurabel.

Dan is dus niet alles getal (in getallen te vangen)!

Er ontstaat een onderscheid tussen
getal: discreet, tellen
en
grootheid: continu, meten

Probleem: hoe pakken we nu verhoudingsgelijkheid aan?

Projecten

1. Babylonische astronomie (2 studenten, 30 min.)
2. Ptolemaeus' berekening van de lengte van de schaduw van een paal van 1m op 21 juni op Rhodos (1 student, 20 min.)
3. Ptolemaeus' berekening van de afstand aarde-zon (2 studenten, 30 min.)
4. Incommensurabiliteit van zijde en diagonaal van een regelmatige vijfhoek. Welke verhouding is dat?
5. Bespreek de bewering: De Grieken hebben bewezen dat $\sqrt{2}$ irrationaal is.

Literatuur

- V. Katz, *A History of Mathematics, An Introduction*. Harper Collins College Publishers, 1993
- C.M. Linton, *From Eudoxus to Einstein: A History of Mathematical Astronomy*. Cambridge, 2004