AM2520-H: Verhoudingen

week 1.3, maandag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 14 september 2020

Outline

Pythagorische verhoudingsgelijkheid

Def 1: Eenheid is, op grond waarvan elk bestaand ding een genoemd wordt.

Def 2: Een getal is een hoeveelheid, samengesteld uit eenheden.

Def 3: Een getal is deel van een getal, het kleinste van het grootste, wanneer het het grootste meet;

Def 4: Delen, wanneer het [het andere] niet meet.

Def 20: Getallen zijn evenredig, wanneer het eerste van het tweede en het derde van het vierde evenvaak veelvoud of hetzelfde deel of dezelfde delen is.

(Euclides, *De Elementen*, boek VII; vertaling: E. J. Dijksterhuis)

Wat zegt Definitie 20 eigenlijk?

Pythagorische verhoudingsgelijkheid

Definitie 20 zegt:

$$a : b \equiv c : d$$

betekent: dat je b even vaak met a kun afpassen als d met c of, omgekeerd, a even vaak met b als c met d.

Dat kun je preciezer maken: als er m, n, x, en y zijn zó dat $a = mx$ en $b = nx$, en $c = my$ en $d = ny$.
Wij kunnen daarvan maken: als $ad = bc$ (maar dat staat er niet).

Hoe bepaal je die x, y, m, en n?

Commensurabiliteit

Twee grootheden zijn commensurabel als er een derde grootheid is die een geheel aantal maal in beide past.

Symbolisch: a en b zijn commensurabel als er een x is en m en n zó dat $a = mx$ en $b = nx$.

Hoe bepaal je die x (en de m en de n)?

Algoritme van Euclides: herhaald de kleinste van de grootste aftrekken (antihypairesis).

Incommensurabiliteit

In de meetkunde zijn er situaties waar 'anthyphairesis' niet stopt.

zijde en diagonaal van een vierkant of
zijde en diagonaal van een regelmatige vijf-hoek

Dan zijn de dingen waar je mee begint *niet* commensurabel.

Dan is dus niet alles getal (in getallen te vangen)!

Er ontstaat een onderscheid tussen
getal: discreet, tellen
en
grootheid: continu, meten

Probleem: hoe pakken we nu verhoudingsgelijkheid aan?

Eudoxos van Knidos ($\approx$ 395–340 BC)

Aan Eudoxos hebben we twee dingen te danken

1. Verhoudingsleer
2. Uitputtingsmethode

Eudoxos' verhoudingsleer

Def 1: Een grootheid is een deel van een grootheid, de kleinste van de grootste, wanneer ze de grootste meet.

Def 2: De grootste is een veelvoud van de kleinste wanneer ze door de kleinste gemeten wordt.

Def 3: Reden is een zekere betrekking in grootte tussen twee gelijksoortige grootheden.

Def 4: Men zegt, dat grootheden een reden tot elkaar hebben die, vermenigvuldigd, elkaar kunnen overtreffen.

Def 5: Men zegt dat grootheden in dezelfde reden zijn, de eerste tot de tweede en de derde tot de vierde, wanneer willekeurig zelfde veelvouden van de eerste en de derde tegelijk groter zijn dan, gelijk aan of kleiner dan willekeurig zelfde veelvouden van de tweede en de vierde, in overeenkomstige volgorde genomen.

(Euclides, *De Elementen*, boek V; vertaling: E. J. Dijksterhuis)

Eudoxos' verhoudingsleer

Def 5: Men zegt dat grootheden in dezelfde reden zijn, de eerste tot de tweede en de derde tot de vierde, wanneer willekeurig zelfde veelvouden van de eerste en de derde tegelijk groter zijn dan, gelijk aan of kleiner dan willekeurig zelfde veelvouden van de tweede en de vierde, in overeenkomstige volgorde genomen.

Wat staat er eigenlijk in Definitie 5?.

Eudoxos zegt dat $A : B \equiv \Gamma : \Delta$ als voor elk tweetal (natuurlijke) getallen μ en ν geldt

- tegelijk met $\mu A > \nu B$ ook $\mu\Gamma > \nu\Delta$
- tegelijk met $\mu A = \nu B$ ook $\mu\Gamma = \nu\Delta$
- tegelijk met $\mu A < \nu B$ ook $\mu\Gamma < \nu\Delta$

Eudoxos' uitputtingsmethode

De Elementen, Boek XII, Propositie 2

Cirkels staan tot elkaar als de vierkanten op de diameters.

Bewijs.

Propositie XII.1 geeft het gestelde voor in de cirkels ingeschreven regelmatige veelhoeken.
Neem cirkels C_1 en C_2 met diameters d_1 en d_2.
Bepaal een oppervlakte S zodanig dat $C_1 : S \equiv d_1^2 : d_2^2$
Neem aan $S < C_2$.
— er is een ingeschreven regelmative veelhoek P_2 in C_2 met $C_2 - P_2 < C_2 - S$
— neem de overeenkomsige veelhoek P_1 in C_1
— Propositie XII.1: $P_1 : P_2 \equiv d_1^2 : d_2^2 = C_1 : S$
— Maar $P_2 > S$ en dus $P_1 > C_1$, tegenspraak. $\square$

Eudoxos' uitputtingsmethode

Bewijs, vervolg.

Neem aan $S > C_2$.
— bepaal een S' zó dat $C_2 : S' \equiv d_2^2 : d_1^2 \equiv S : C_1$
— wegens $S > C_2$ volgt $C_1 > S'$
— als in het geval $S < C_2$ volgt een tegenspraak
We hebben niet $S < C_2$, en niet $S > C_2$, dus hebben we $S = C_2$. $\square$

Eudoxos' uitputtingsmethode

Hoezo uitputting?

De Elementen, Boek X, Propositie 1

Indien, wanneer twee ongelijke grootheden uitgezet zijn, van de grootste een stuk groter dan de helft en van de rest een stuk, groter dan de helft, en indien dit steeds zo doorgaat, dan zal er een grootheid overblijven, die kleiner zal zijn dan de uitgezette kleinste grootheid.

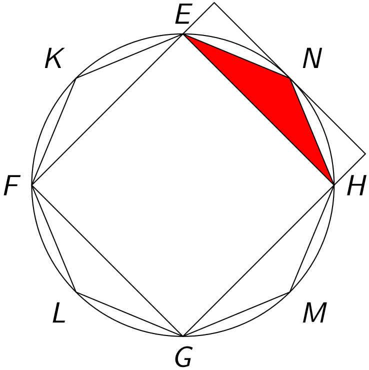
In moderne taal: als $0 < y < x$ en $x_1 < \frac{1}{2}x$, $x_2 < \frac{1}{2}x_1$, $\ldots$ dan is er een n met $x_n < y$.

Bewijs: uit de Archimedische eigenschap (Definitie V.4).

Hoe gebruiken we dat.

Eudoxos' uitputtingsmethode

Bij het maken van de ingeschreven veelhoek P_2.



Het verschil tussen de cirkel C en de achthoek A is minder dan de helft van het verschil tussen de cirkel en de vierhoek V:

$C - V$ is kleiner dan vier maal deze rechthoek

en we halen vier keer de helft van de rechthoek weg

zo putten we de cirkel uit

De vierde proportionaal

Gegeven drie vergelijkbare grootheden A, B en Γ, een vierde proportionaal is een grootheid Δ met

$$A : B \equiv \Gamma : \Delta$$

De S was een vierde proportionaal voor d_1^2, d_2^2, en C_1.

Waar komt die vandaan?

Als A, B en Γ lijnstukken zijn kun je Δ construeren met passer en liniaal.

In het algemeen is dat niet zo eenvoudig

Hoe zou je S maken? Kun je S maken (met passer en liniaal)?

Voor Eudoxos sprak het vanzelf. Voor ons: toepassing van continuïteit.