AM2520-H: Indische Wiskunde

week 1.4, maandag

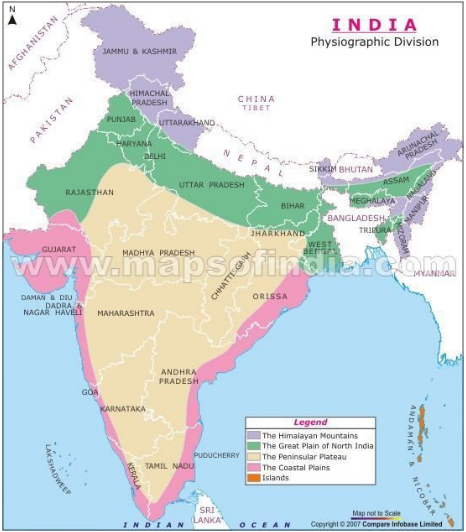
K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 21 september 2020

Outline

India


INDIA
Physiographic Division
JAMMU & KASHMIR
HIMACHAL PRADESH
PUNJAB
UTTARAKHAND
HARYANA
DELHI
RAJASTHAN
UTTAR PRADESH
BIHAR
SIKKIM
BHUTAN
ARUNACHAL PRADESH
ASSAM
NAGALAND
MEGHALAYA
MANIPUR
BANGLADESH
TRIPURA
MIZORAM
JHARKHAND
WEST BENGAL
GUJARAT
MADHYA PRADESH
CHHATTISGARH
ORISSA
MYANMAR
DAMAN & DIU
DADRA & NAGAR HAVELI
MAHARASHTRA
ANDHRA PRADESH
GOA
KARNATAKA
PUDUCHERRY
TAMIL NADU
KERALA
LAKSHADWEEP
SRI LANKA
INDIAN OCEAN
ANDAMAN & NICOBAR
AFGHANISTAN
PAKISTAN
CHINA
TIBET
NEPAL
N
Legend
The Himalayan Mountains
The Great Plain of North India
The Peninsular Plateau
The Coastal Plains
Islands
Map not to Scale
www.mapsofindia.com
Copyright © 2007 Compare Infobase Limited

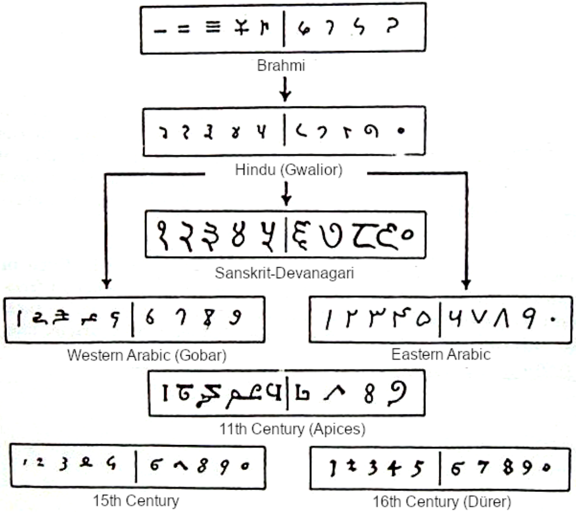
Een grove tijdlijn

- 6e eeuw BC: Vedische verzen Sulbasutra's voor altaarbouw (stelling van Pythagoras, benaderende kwadratuur van de cirkel ($\pi \approx 3{,}088$))
- 327 BC: Alexander de Grote bereikt India; overdracht astronomische werken van Hipparchos (ca. 150 BC)?
- 3e eeuw BC: inscripties met vroege versie van 10-tallig stelsel; aparte symbolen voor 10, 20, . . . , 90, 100, 1000
- 499: Aryabhata: *Aryabhatiya*
- ca. 600: decimaalstelstel met plaatsnotatie

Een grove tijdlijn

- 628: Brahmagupta: *Brahmasphutasiddhanta*
  ("Correctly established doctrine of Brahma")
- 629: Bhaskara I: commentaar op *Aryabhatiya*
- 8e eeuw: overname 10-tallig stelsel door Arabische wereld
- 1150: Bhaskara II: *Siddhanta Shiromani* ("Crown of treatises")
- 14e eeuw: Madhava: benadering π (elf decimalen),
  reeks van Leibniz, machtreeks sinus

Ontwikkeling van ‘de’ cijfers



Piṅgala (ongeveer 2e eeuw BC)

Schreef een werk, *Chandaḥśāstra*, met daarin een uitvoerige beschrijving van versmaten in het Sanskriet.

Aan het eind behandelt hij zes hieraan verwante telproblemen (*pratyayas*).

Prastāra	Spreiding	Maak een lijst van alle theoretisch mogelijke vormen van versmaten met een vast aantal lettergrepen
Naṣṭaṃ	Vernietigd, Verloren	Reconstrueer de vorm van een versmaat uit zijn nummer in de lijst
Uddiṣṭaṃ	Index	Bepaal het nummer van een vorm in de rij
Lagakriyā	Kort-Lang-oefening	Bepaal het aantal vormen met een gegeven aantal korte (of lange) lettergrepen
Saṅkhyā	Tellen	Bepaal het totaal aantal theoretisch mogelijke vormen
Advayoga	Ruimtemaat	Bepaal de ruimte nodig om de hele lijst vormen van een versmaat op te schrijven

Dat kan zo Caleidoscoop in.

Prastāra

De procedure is recursief.
Begin met G en L, bij $n = 1$.
Van $n - 1$ naar n zet twee kopiën van de lijst voor $n - 1$ onder elkaar en plak een G achter de termen in de eerste en een L achter die in de tweede.

Dus

$n=1$	$n=2$	$n=3$
G	GG	GGG
L	LG	LGG
	GL	GLG
	LL	LLG
		GGL
		LGL
		GLL
		LLL

Naṣṭaṃ

Neem een getal, zeg 7.
Herhaal de volgende stappen:

- als het getal even is halveer het zet een L neer
- als het getal oneven is tel 1 op, halveer en zet een G neer

Dus, bij 7:

$7 \to 8 \to 4 \quad G \ldots$
$4 \to 2 \quad GL \ldots$
$2 \to 1 \quad GLL \ldots$
$1 \to 2 \to 1 \quad GLLG \ldots$
$1 \to 2 \to 1 \quad GLLGG \ldots$
$1 \to 2 \to 1 \quad GLLGGG \ldots$
$1 \to 2 \to 1 \quad GLLGGGG \ldots$

Net zo lang doorgaan tot je de juiste lengte hebt.

Uddiṣṭaṃ

Het omgekeerde dus.
Begin met $LGLGGGGGG$ en zet $k = 1$.
De Gs aan het eind dragen niet bij aan het nummer, dus ga naar de meest rechtse L (als die er niet is dan blijft k gelijk aan 1)
Hier is er een L: verdubbel k, dus $1 \to 2$, en ga een stap naar links.
We hebben een G: verdubbel k en trek 1 af, $2 \to 4 \to 3$, en ga een stap naar links.
Weer een L: verdubbel $3 \to 6$
Klaar

Lagakriyā

"Bepaal het aantal vormen met een gegeven aantal korte (of lange) lettergrepen"

Binimiaalcoëfficiënten dus.

Als je goed leest (artikel op Brightspace) kun je uit het werk van Piṅgala, en de commentaren er op de bekende formule

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

distilleren.

Hoezo lezen?
De Indische wiskunde werd vrijwel geheel in versvorm opgeschreven.

Dit is een mooi stukje om een voordracht aan te weiden.

Saṅkhyā

Wat hier bijzonder is is niet het resultaat: er zijn 2^n vormen met n lettergrepen, maar de manier om het te berekenen. Een Engelse vertaling:

"two in case of half. (If n can be halved, write 'twice'.)
In case one (must be subtracted in order to halve), (write) 'zero'.
(going in reverse order), twice if 'zero'.
In case where the number can be halved, multiply by itself (that is, square the result.)"

$n = 6$	twice	$(2 \cdot 2^2)^2 = 64$
$n = 3$	zero	$2 \cdot 2^2 = 8$
$n = 2$	twice	$2^2 = 4$
$n = 1$	zero	2

Saṅkhyā

Verder gaf Piṅgala ook nog een formule voor de som

$$2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n$$

om alle vormen van lengte n of minder te kunnen tellen.

"twice two-less that (quantity) replaces (the sequence of counts) ending (with the current count)."

"twee keer de laatste min twee" dus: $2 \cdot 2^n - 2$.

Latere commentatoren en wiskundigen generaliseerden dit naar willekeurige meetkundige rijtjes.

Advayoga

Het ruimteprobleem.

Als elke regel een vingerbreedte lang is dan heb je 33.554.431 vingerbreedtes nodig om alle vormen bij $n = 24$ op te schrijven.

En dat is dan 426,476 kilometer.

NB $33.554.431 = 2 \cdot 2^{24} - 1$: tussen alle vormen moet een even lange spatie staan ...