AM2520-H: Indische Wiskunde

week 1.4, dinsdag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 22 september 2020

Outline

Rekenen

Aryabhata: worteltrekken

Algorithmen voor wortel en derdemachts wortel

Worteltrekken met gebruik van $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$$
\begin{array}{rl}
 & 66\,58\,56 \quad 816 \\
8 \times 8 = & \underline{64} \\
 & 2\,58 \\
161 \times 1 = & \underline{1\,61} \\
 & 97\,56 \\
1626 \times 6 = & \underline{97\,56} \\
 & 0
\end{array}
$$

Derdemachtswortel: via $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

Aryabhata: beandering van π

Benadering voor π

> *"A* 100 *increased by* 4, *multiplied by* 8 *and also* 62 000 *is an approximate circumference of a circle whose diameter is two ayutas [ten thousands]"*

Dus een cirkel met diameter 20000 heeft een omtrek van ongeveer $(100 + 4) \cdot 8 + 62000 = 62832$.

En dus

$$\pi \approx 3{,}1416$$

Aryabhata: lineaire congruenties

Voorbeeld (uit het commentaar van Bhaskara I):

> *"[A quantity when divided] by* 12 *has remainder which is* 5*, and furthermore it is seen by me [having] a remainder which is* 7 *when divided by* 31*. What should one such quantity be?"*

In moderne notatie: bepaal een geheel getal n dat voldoet aan

$$n \equiv 5 \bmod 12 \qquad \text{en} \qquad n \equiv 7 \bmod 31$$

Ofwel: bepaal gehele getallen x en y die voldoen aan $12y + 5 = 31x + 7$

Aryabhata: lineaire congruenties

Oplossing: door herhaald delen met rest.

$12y + 5 = 31x + 7$, dus $y = \frac{31x+2}{12} = 2x + \frac{7x+2}{12} = 2x + w$.

Dan $7x = 12w - 2$, dus $x = \frac{12w-2}{7} = w + \frac{5w-2}{7} = w + v$

Dan $5w = 7v + 2$, dus $w = \frac{7v+2}{5} = v + \frac{2v+2}{7} = v + u$

Dan $2v = 5u - 2$; even goed kijken: $u = 2$ en $v = 4$ voldoen, dus $w = 6$, dan $x = 10$ en $y = 26$.

Antwoord: $n = 12y + 5 = 31x + 7 = 317$.

Aryabhata: sinustabel

Met gebruik van $\operatorname{Sin} x = R \sin x$; geen (halve) koorden.
met $R = 3438 \approx 21600/(2\pi)$.

> *"The first Sine is a ninety-sixth part of* 21 600*.*
> *If one divides the first Sine by the first Sine and subtracts the quotient from the first Sine, one obtains the difference of the second Sine; the sum of the first Sine and the difference of the second Sine is the second Sine.*
> *If one divides the second Sine by the first Sine and subtracts the quotient from the difference of the second Sine, one obtains the difference of the third Sine; the sum of this and the second Sine is the third Sine." [Etcetera]*

Aryabhata: sinustabel

Interpretatie.

De 'eerste Sinus' is $\mathrm{Sin}(a) = R\sin 3\frac{3}{4}^\circ = 21600'/96 = 225'$

Eerste stap:

$$\Delta_2 = \mathrm{Sin}\,2a - \mathrm{Sin}\,a = \mathrm{Sin}\,a - \frac{\mathrm{Sin}\,a}{\mathrm{Sin}\,a}$$

Dus $\Delta_2 = 225 - 1 = 224$, en dus $\mathrm{Sin}\,2a = \mathrm{Sin}\,a + \Delta_2 = 449$.

Volgende stap:

$$\Delta_3 = \mathrm{Sin}\,3a - \mathrm{Sin}\,2a = \Delta_2 - \frac{\mathrm{Sin}\,2a}{\mathrm{Sin}\,a}$$

Dus $\Delta_3 = 224 - 2 = 222$,en dus $\mathrm{Sin}\,3a = \mathrm{Sin}\,2a + \Delta_3 = 671$.

Enzovoort.

Aryabhata: sinustabel

"The 24 sine [differences] reckoned in minutes of arc are 225, 224, 222, 219, 215, 210, 205, 199, 191, 183, 174, 164, 154, 143, 131, 119, 106, 93, 79, 65, 51, 37, 22, 7*."*

Dat is niet slecht (fout kleiner dan een procent):

$n \cdot a$	Sin(na) (Aryabhata)	Sin(na) (exact)
$03^\circ\,45'$	$225'$	224,8560
$07^\circ\,30'$	$449'$	448,7490
$11^\circ\,15'$	$671'$	670,7205
$15^\circ\,00'$	$890'$	889,8199
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$78^\circ\,45'$	$3372'$	3371,9398
$82^\circ\,30'$	$3409'$	3408,5874
$86^\circ\,15'$	$3431'$	3430,6390
$90^\circ\,00'$	$3438'$	3438,0000

Brahmagupta: rekenen met 0 en $+/-$

The sum of two positive quantities is positive; of two negative is negative; of a positive and a negative is their difference; or, if they are equal, zero . . . . The product of a negative quantity and a positive is negative; of two negative, is positive; of two positive, is positive . . . . Positive divided by positive or negative by negative is positive . . . . Positive divided by negative is negative. Negative divided by positive is negative.

Brahmagupta: *abc*-formule

Los op $ax^2 + bx = c$

> *"Diminish by the middle [number] the square-root of the rupas multiplied by four times the square and increased by the square of the middle [number]; divide the remainder by twice the square. [The result is] the middle [number]."*

[a = 'square', b = 'middle', c = 'the rupas']

Iets korter:

$$x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}$$

Brahmagupta: vergelijking van Pell

Bepaal gehele getallen x en y zodanig dat

$$Dx^2 \pm b = y^2$$

Voor gegeven D noemen we (x, y) een oplossing voor de additieve constante b.

> *"[A person who can] make the square of [a number] ... multiplied by 92 ... with one added to the product an exact square within a year [is] a mathematician."*

Dat wil zeggen los op: $92x^2 + 1 = y^2$ (binnen een jaar).

Compositieregel: als (x_1, y_1) en (x_2, y_2) oplossing zijn voor de additieve constanten b_1 en b_2, dan is $(x_1y_2 + x_2y_1, Dx_1x_2 + y_1y_2)$ een oplossing voor de additieve constante b_1b_2.

Brahmagupta: vergelijking van Pell

Stap 1: kies een oplossing (x_0, y_0) voor één of andere additieve constante b_0, bijvoorbeeld $(x_0, y_0) = (1, 10)$ met $b_0 = 8$: $92 \cdot 1^2 + 8 = 10^2$

Stap 2: neem $x_1 = 2x_0y_0 = 20$ en $y_1 = Dx_0^2 + y_0^2 = 192$. Dan is $(20, 192)$ een oplossing voor $b_1 = b_0^2 = 64$: $92 \cdot 20^2 + 64 = 192^2$

Stap 3: delen door $b_1^2 = 8^2$ geeft dat $(x_2, y_2) = (\frac{5}{2}, 24)$ een oplossing is bij $b_2 = 1$: $92 \cdot (\frac{5}{2})^2 + 1 = 24^2$.

Stap 4: dan is $(2x_2y_2, Dx_2^2 + y_2^2) = (120, 1151)$ een oplossing voor de additieve constante $b_2^2 = 1$: $92 \cdot 120^2 + 1 = 1151^2$.

Brahmagupta: vergelijking van Pell

Het loopt niet altijd goed (geheel) af, bij $b = 1$.

Bijvoorbeeld $67x^2 + 1 = y^2$.

Begin met $(x_0, y_0) = (1, 8)$ en $b = -3$: dus $67 \cdot 1^2 - 3 = 8^2$.

Neem $(x_1, y_1) = (2x_0y_0, Dx_0^2 + y_0^2) = (16, 131)$ en $b_1 = b_0^2 = 9$: $67 \cdot 16^2 + 9 = 131^2$.

Delen door 9 geeft $67(\frac{4}{3})^2 + 1 = (\frac{131}{3})^2$.

Verder compositie levert hier niets op.
Bhaskara II geeft een algorithme dat altijd werkt.

Brahmagupta: oppervlakte en diagonalen van een koordenvierhoek

Schrijf $s = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$, dan geldt

$$O = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

Verder

$$AC = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$$

en

$$BD = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$$

NB. In het limietgeval $A = B$ volgt uit de eerste formule de formule van Heron (1e eeuw) voor de oppervlakte van driehoeken.

Bhaskara II

In *Siddhanta Shiromani* (Sanskriet voor "Crown of treatises") onder andere:

- precieze regels voor algebraische manipulaties
- twee oplossingen voor kwadratische vergelijkingen
- algemene oplossing Pell vergelijking
- trigonometrie en sferische trigonometrie, optelformules voor Sin

Madhava (commentaren door Sankara and Nilakhanta)

Meetkundige bewijzen voor:

- $\pi \approx 3{,}14159265339$
- De 'reeks van Leibniz', met foutschatting:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

- Machtreeks voor de sinus

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Voordrachten

1. sinustabel à la Aryabhata en Bhaskara I (2 studenten)
2. vergelijking van Pell à la Bhaskara II (2 studenten)
3. benadering van π à la Madhava (1 student)