AM2520-H: Wiskunde in de Islam

week 1.5, maandag

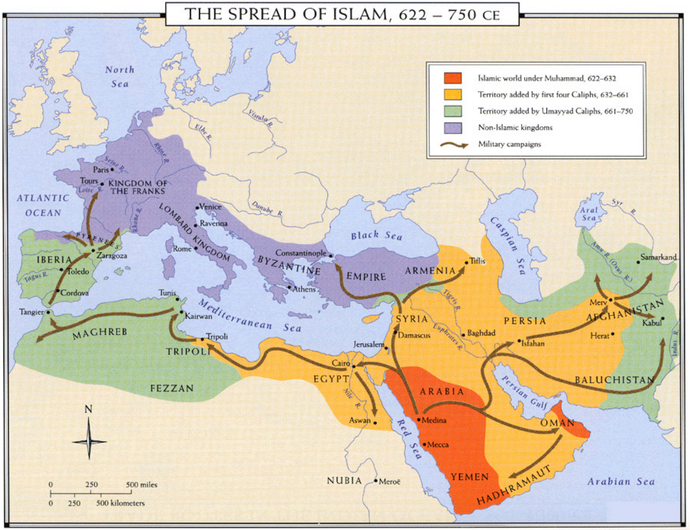
K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 28 september 2020

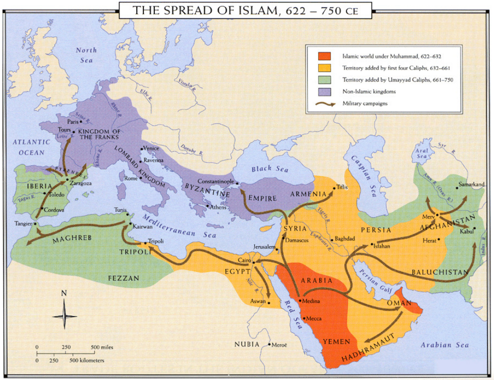
Outline

Verspreiding van de Islam



Verspreiding van de Islam

622 begin van de islamitische jaarrekening
634 dood van de profeet Mohammed
635 verovering van Damascus
637 verovering van Perzië
642 verovering van Alexandrië
664 verovering van Kabul
711 Islam bereikt Spanje
712 verovering van Samarkand



Het Huis der Wijsheid

In 766 werd Bagdad gesticht door de kalief al-Manṣūr

De kalief Hārūn al-Rashīd stichtte een bibliotheek in Bagdad

Zijn opvolger al-Ma'mūn stichtte een onderzoeksinstituut, *Bayt al-Ḥikma*, het Huis der Wijsheid (heeft ruim twee eeuwen bestaan).

Eerste doel: de werken van de oude Grieken, de Babyloniërs, de Indiërs, ... in het Arabisch vertalen.

Daarnaast ook zelf onderzoek doen.

Het Huis der Wijsheid

Vertalingen van Indische en Griekse werken:

773	Arabische vertaling indiase Siddhanta (Brahmagupta?)
ca. 800	Arabische vertaling Euclides' Elementen
ca. 830	Arabische vertaling Ptolemaeus' Almagest
ca. 850	Arabische vertaling Appolonius
ca. 910	Arabische vertaling Heron en Diophantus

Bloei en ondergang

Net als de voorgangers: algemener onderzoek dan alleen voor praktische zaken.

Men voelde het als een opdracht van God.
Aardse kennis als een weg naar heilige kennis.

In de 11de eeuw kenterde het tij:
Wiskundige kennis die boven de elementaire rekenkunde uitging was ‘vreemd’.
Die vreemde kennis werd door veel religieuze leiders als subversief ervaren.

Er werd nog veel belangrijk werk gedaan maar de wetenschap werd gaandeweg steeds minder belangrijk.

al-Khwārizmī

Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī
Book on Addition and Subtraction after the Method of the Indians
(We kennen alleen Latijnse vertalingen.)

Negen karakters voor de eerste negen getallen en een nul.

Algoritmen voor optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, halveren, verdubbelen, vierkantswortels.

Nadeel: bedoeld om in het zand geschreven te worden; bij elke stap werden tussenresultaten uitgeveegd.

Een Latijnse vertaling begint met “Dixit Algorismi”,
en ‘algorismi’ ging op de operaties slaan en niet op de man.

Zo zijn we aan het woord *algoritme* gekomen.

al-Uqlīdisī

Abu l-Ḥasan al-Uqlīdisī
The Book of Chapters on Hindu Arithmetic (952, Damascus)

Twee verbeteringen.
Ten eerste: hoe op papier te werken, zonder uitvegen.
Voorbeeld: 3249×2735

			3249			
			2735			
6	21	9	15			
	4	14	6	10		
		8	28	12	20	
			18	63	27	45

En nu van rechts naar links optellen maar met cijfers meenemen.

al-Uqlīdisī

Ten tweede: decimale breuken.

De helft van 1 op een plek is een 5 op de plek ervoor.
Dus als we een oneven getal halveren zetten we de helft als 5 er voor met een $'$ om de plaats van de eenheden te markeren.

Voorbeeld: 19, $9'5$, $4'75$, $2'375$, $1'1875$, en $0'59375$.

al-Uqlīdisī

Een mooi citaat.

> *Most scribes will have to use it because it is easy, quick and needs little precaution, little time to get the answer, and little keeping of the heart busy with the working that he [the scribe] has to see between his hands, to the extent that if he talks, he will not spoil his work; and if he leaves it and busies himself with something else, when he turns back to it he will find the same and thus proceed, saving the trouble of memorizing it and keeping his heart busy with it.*
> *This is not the case in the other (arithmetic) which requires finger bending and other necessaries. Most calculators will have to use it [the Indian method] with numbers that cannot be managed by the hand because they are big.*

al-Khwārizmī

Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī
The Condensed Book on the Calculation of al-Jabr and al-Muqābala

al-Jabr: herstellen: een afgetrokken getal naar de andere kant brengen
Bijvoorbeeld: $3x + 2 = 4 - 2x$ gaat over in $5x + 2 = 4$.

al-Muqābala: vergelijken: links en rechts evenveel aftrekken
Bijvoorbeeld: $5x + 2 = 4$ gaat over in $5x = 2$.

En ja, 'al-Jabr' is 'Algebra' geworden

al-Khwārizmī

Een klassificatie van Kwadratische vergelijkingen.

1. $ax^2 = bx$ — squares are equal to roots
2. $ax^2 = c$ — squares are equal to numbers
3. $bx = c$ — roots are equal to numbers
4. $ax^2 + bx = c$ — squares and roots are equal to numbers
5. $ax^2 + c = bx$ — squares and numbers are equal to roots
6. $bx + c = ax^2$ — roots and numbers are equal to squares

al-Khwārizmī

Voorbeeld van type 4:

What must be the square which, when increased by ten of its roots, amounts to thirty-nine?
The solution is this: you halve the number of roots, which in the present instance yields five. This you multiply by itself; the product is twenty five. Add this to thirty-nine; the sum is sixty-four. Now take the root of this which is eight, and subtract from it half the number of roots, which is five; the remainder is three. This is the root of the square which you sought for.

Los op: $x^2 + 10x = 39$. Dat doe je door 10 (het aantal wortels) te halveren, dat geeft 5. Neem het kwadraat van 5, dat is 25. Tel dat op bij 39, dat geeft 64. Neem hiervan de wortel, dat is 8. Trek hier de 5 van af, de rest is drie. Dat is de oplossing.

al-Khwārizmī

In symbolen $x^2 + 10x = 39$ wordt $x^2 + 10x + 25 = 64$, of $(x+5)^2 = 8^2$, dus $x + 5 = 8$ of $x = 3$.

Algemeen: $x^2 + bx = c$ wordt $x^2 + bx + (\frac{b}{2})^2 = c + (\frac{b}{2})^2$.

Hier staat dus $(x + \frac{b}{2})^2 = c + (\frac{b}{2})^2$.

En dus $x = \sqrt{(\frac{b}{2})^2 + c} - \frac{b}{2}$.

Rechtvaardiging: (tekening)

Abū Kāmil

Abū Kāmil ibn Aslam ($\approx$ 850–930)
Kitāb fī al-jabr wa'l-muqābala

Onderbouwde de methoden van al-Khwārizmī met behulp van *De Elementen*, vooral boek II.

Hij was niet bang voor irrationale grootheden.

Abū Kāmil

Probleem 37

If one says that 10 is divied into two parts and one part is multiplied by itself and the other by the root of 8, and subtract the quantity of the product of one part times the root of 8 from ... the product of the other part multiplied by itself, it gives 40.

Kortweg, los op: $(10-x)(10-x)-x\sqrt{8}=40$.

Oplossing: maak er type 5 van: $x^2+60=(20+\sqrt{8})x$ en volg de methode.

We vinden $x=10+\sqrt{2}-\sqrt{42+\sqrt{800}}$

Abū Kāmil

Probleem 45

One says that 10 is divided into two parts, each of which is divided by the other, and when each of the quotients is multiplied by itself and the smaller is subtracted from the larger then there remains 2.

Los op

$$\left(\frac{10-x}{x}\right)^2 - \left(\frac{x}{10-x}\right)^2 = 2$$

Abū Kāmil

Vooruit, nog eentje dan:

Probleem 61

One says that 10 is divided into three parts, and if the smallest is multiplied by itself and added to the middle multiplied by itself, it equals the largest multiplied by itself, and when the smallest is multiplied by the largest, it equals the middle multiplied by itself.

Bepaal $x < y < z$ zó dat $x + y + z = 10$, $x^2 + y^2 = z^2$, en $xz = y^2$.

Strategie: 'false position': los de laatste twee op voor $x = 1$ en herschaal dan tot $x + y + z = 10$.

Abū Kāmil

Niet te onderschatten bijdrage van Abū Kāmil: alles was gewoon een ‘getal’.
Niet iets meetkundigs als rechthoek, lijn, . . .

De onderbouwing was meetkundig, maar de toepassingen waren algebraïsch.