AM2520-H: Wiskunde in de Islam

week 1.5, dinsdag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 29 september 2020

Outline

Algebra

Combinatoriek

Derdegraadsvergelijkingen

al-Karajī

Abū Bakr al-Karajī
al-Fakhrī (The Marvelous) “het bepalen van bekenden uitgaande van bekenden”

Definitie van, en namen voor, willekeurige machten.
Recursief: $x^{n+1} = x^n \cdot x$ en $(\frac{1}{x})^{n+1} = (\frac{1}{x})^n \cdot \frac{1}{x}$.

Hiermee ontwikkelde hij elementaire rekenkunde met polynomen.

al-Karajī

Net als Abū Kāmil niet bang voor wortelvormen:

$$\sqrt{A+B} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B^2}}{2}} + \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B^2}}{2}}$$

en

$$\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{A^2B} + 3\sqrt[3]{AB^2} + A + B}$$

Ga maar na ...

En hou er rekening mee dat dit allemaal in woorden ging.

al-Samaw'al ($\approx$ 1125–1174)

Al-Bāhir fi'l ḥisāb (The Shining Book of Calculation)

Door de woorden was de optelregel voor machten niet duidelijk zichtbaar:
het product van een kwadraat en een kubus was een kwadraat-kubus

al-Samaw'al maakte een tabel

7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7
x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	1	x^{-1}	x^{-2}	x^{-3}	x^{-4}	x^{-5}	x^{-6}	x^{-7}

The distance of the order of the product of the two factors from the order of one of the two factors is equal to the distance of the order of the other factor from the unit. If the factors are in different directions the we count [the distance] from the order of the first factor towards the unit; but, if they are in the same direction, we count away from the unit.

(Hij had geen getallen in de eerste rij maar de namen . . .)

al-Samaw'al

Hij kon nu ook polynomen op elkaar delen, door een staartdeling.

$$\frac{20x^2+30}{6x^2+12} = 3\frac{1}{3} + 5\cdot\frac{1}{x} - 6\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^2} - 10\cdot\frac{1}{x^3} + 13\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^4} + 20\cdot\frac{1}{x^5} - 26\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^6} - 40\cdot\frac{1}{x^7}$$

Controle door uitvermenigvuldigen: het is "het antwoord bij benadering"

Sommen van machten

al-Karajī: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 10^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + 10)^2$
Het bewijs was in feite de inductiestap van het algemene geval.

Ibn al-Haytham (965–1039): ‘bewijs door speciaal geval’ van

$$(n+1)\sum_{i=1}^{n} i^k = \sum_{i=1}^{n} i^{k+1} + \sum_{p=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} i^k$$

Voor $k = 0$ staat er $(n+1)n = \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{p=1}^{n} p$, en dus . . . .
En zo kun je aan alle formules komen.

De binomiaalformule

al-Samaw'al

"For a number divided into two parts, its square-square is equal to the square-square of each part, four times the product of each by the cube of the other, and six times the product of the squares of each part."

Weer: het bewijs van het speciale geval bevat alle ingrediënten van het inductieve bewijs van het algemene geval.

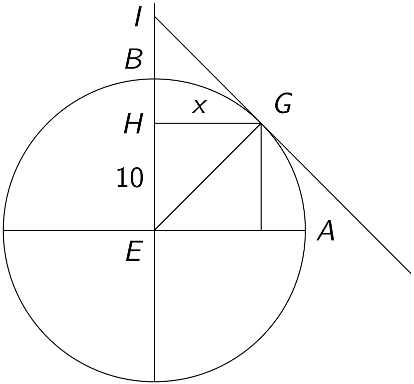
Wat ontbrak waren de middelen het algemene geval uit te kunnen drukken.

al-Samaw'al gaf ook een stuk van de 'driehoek van Pascal', met impliciet de formule

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

al-Khayȳamī

Umar ibn Ibrāhīm al-Khayȳamī (bekend als Omar Khayyam)
On the Division of the Quadrant of a Circle



Bepaal het punt G zó dat

$$AE : GH = EH : HB$$

Doe of je G hebt en trek de raaklijn

Er moet gelden $EI = EG + GH$ (ga na)

Stel $EH = 10$ en $GH = x$

Dit leidt tot $x^3 + 200x = 20x^2 + 2000$

al-Khayyāmī

Dit was het begin van een onderzoek naar derdegraadsvergelijkingen.
Een klassificatie:

$$
\begin{array}{lll}
x^3 = d & x^3 + cx = d & x^3 + bx^2 + cx = d \\
 & x^3 + d = cx & x^3 + bx^2 + d = cx \\
 & x^3 = cx + d & x^3 + cx + d = bx^2 \\
 & x^3 + bx^2 = d & x^3 = bx^2 + cx + d \\
 & x^3 + d = bx^2 & x^3 + bx^2 = cx + d \\
 & x^3 = bx^2 + d & x^3 + cx + bx^2 + d \\
 & & x^3 + d = bx^2 + cx
\end{array}
$$

Oplossen met behulp van kegelsneden.

al-Khayyāmī

Het probleem van het punt G:
bepaal (de coördinaten) van de snijpunten van de hyperbool

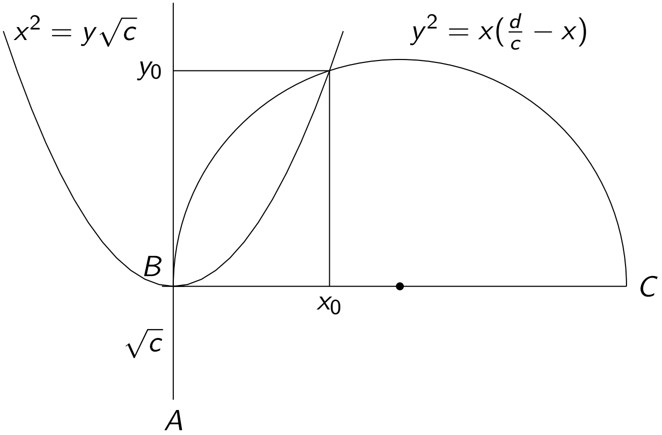
$$xy = \sqrt{20\,000}$$

en de halve cirkel

$$x^2 - 30x + y^2 - \sqrt{800}y + 400 = 0$$

al-Khayyāmī

Voorbeeld van één van de veertien gevallen: $x^3 + cx = d$.



$AB = \sqrt{c}$
$BC \cdot AB^2 = d$, of
$BC = d/c$
Het snijpunt van de parabool en de cirkel geeft ons de oplossing. Reken maar na:
$x_0^3 + cx_0 = d$

al-Khayyāmī

Er was wel een probleem.

Bestonden die snijpunten wel?
Konden die toch niet meetkundig gemaakt worden?

Leesopdracht voor de volgende keer: *De perfecte passer*.

En hoe moest het algebraïsch?

al-Tusi (†1213)

Kwalitatieve studie: aantal nulpunten van de vergelijking.
Bijvoorbeeld $x^3 + d = bx^2$; bekijk $D = d - \frac{4}{27}b^3$.