AM2520-H: Wiskunde in China

week 1.6, maandag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 5 oktober 2020

Outline

Dynastiën

1600 BC Shang dynastie; eerste bewijs van schrift en een getallensysteem ‘oracle bones’

1000 BC Zhou dynastie

600 BC Feodale staten, Confucius, intellectuele bloei

221 BC Qin Shi Huangdi maakte van China (weer) één rijk; centrale buraucratie, standaardiseringen

Dynastiën

200 BC Han dynastie, duurde zo'n 400 jaar.

Uit die tijd:

- *Suan shu shu* (*Book of Numbers and Computation*).
  Gevonden in 1984 in het graf van een ambtenaar.
- *Zhoubi suanjjing* (*Arithmetical Classic of the Gnomon and the Circular Paths of heaven*)
- *Jiuzhang suanshu* (*Nine Chapters on the Mathematical Art*)
  Dit werd door de eeuwen een hoofdwerk in de Chinese wiskunde
- We kennen *Nine Chapters* door een uitgave van Liu Hui (3de eeuw) met veel commentaar en een tiende hoofdstuk: *Sea Island Mathematical Manual*

Dynastiën

- 300 Han dynastie valt uiteen
- 581 Sun Dynastie
- 618 Tang Dynastie (300 jaar)
- 960 Song Dynastie
- 1279 Ghenghis Khan en de Mongolen
- 1400 Ming Dynastie

Ten Mathematical Classics

In de Tang Dynastie werden onder leiding van Li Chunfeng de *Ten Mathematical Classics* samengesteld, met onder meer:

- *Arithmetical Classic of the Gnomon*
- *Nine Chapters*
- *Sea Island Mathematical Manual*
- *Mathematical Classic of Master Sun* (4de eeuw)
- *Mathematical Classic of Zhang Qiunjuan* (eind 5de eeuw)

Er bestaan versies uit 1213 (Song dynastie) en 1403–1407 (Ming dynastie)

Voornamelijk opgaven-met-uitwerkingen om te bestuderen voor het ambtenarenexamen

Getalsystemen

Rond 4de eeuw BC een tientallig stelsel zonder nul.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

Waarom twee soorten?

Voor het leesgemak: de eersten bij eenheden, hondertallen . . . , de tweede rij voor de tientallen, duizendtallen . . .

Dus 𝍩𝍠𝍭𝍥 is 1156
en 𝍮 𝍰𝍢 is 6083 (er staat een spatie in plaats van een nul)

Er werden wel stippen gezet om lege plaatsen te markeren maar een echte ‘nul’ ziet men pas in de 12de eeuw.

Getalsystemen

Breuken in woorden: “5 fen zhi 4” betekent iets als “4 stukken van een geheel dat in 5 gelijke delen gebroken is” en dat is dus $4/5$.

In de middeleeuwen gebruikte men veelal decimale breuken.

Negatieve getallen waren er ook al meestal in een andere kleur op rekentafels: zwart was negatief, rood positief.

“Rood staan” doen we sinds de middeleeuwen (Italië).

Getalsystemen

Voor het vereenvoudigen van breuken:

- trek de teller (herhaaldelijk) af van de noemer af
- gebruik de rest als noemer en trek die van de teller af
- gebruik wat gelijk is aan teller en noemer als deler
- het is dan mogelijk teller en noemer door deze deler te delen

Het algoritme van Euclides dus

Worteltrekken

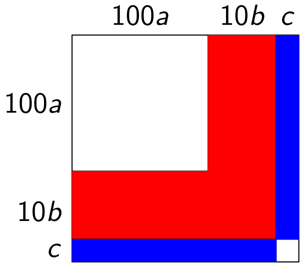
Hoofdstuk 4 van *Nine Chapters*

Opgave 12

Bepaal de zijde van een vierkant van oppervlakte 55.225

Oplossing: het algoritme dan we bij de Indiërs gezien hebben, maar anders opgeschreven.

Bepaal het grootste cijfer a met $(100a)^2 < 55.225$.
Dat is 2.
Los op: $2 \cdot 100a \cdot 10b < 55.225 - 40.000$.
Geeft $b < 4$, en zelfs $2 \cdot 200 \cdot 30 + 30^2 < 15.225$, dus $b = 3$.
Nu $2 \cdot 230 \cdot c$ kleiner dan de rest: $c < 6$
En $c = 5$ werkt, en die geeft het antwoord: 235.



Oppervlakte

Nine Chapters, hoofdstuk 1, opgave 32

Er is een rond veld met omtrek 181 en diameter $60\frac{1}{3}$. Wat is de oppervlakte? :
Antwoord: $2730\frac{1}{12}$

Kennelijk $\pi = 3$.

Vier regels (equivalent als $\pi = 3$):

1. De helft van de omtrek en de helft van de diameter worden vermenigvuldigd en geven de oppervlakte (Archimedes!)
2. De omtrek en diameter worden vermenigvuldigt en het resultaat door 4 gedeeld
3. Vermenigvuldig de diameter met zichzelf. Vermenigvuldig het resultaat met 3 en deel dan door 4.
4. De omtrek wordt vermenigvuldigd met zichzelf. Deel het resultaat door 12.

Oppervlakte

Liu Hui, in zijn commentaar:
"dat klopt niet, een ingeschreven regelmatige 12-hoek heeft al oppervlakte 3"

Hij maakte steeds betere benaderingen met behulp van hoekhalvering.

> *Hoe groter het aantal zijden, hoe kleiner het verschil tussen de oppervlakte van de cirkel en dat van de ingeschreven veelhoek. Herhaaldelijk delen, tot het niet meer kan, levert een regelmatige veelhoek die met de cirkel samenvalt, met geen enkel deel niet overdekt.*

De oppervlakte, S_{2n}, van een regelmatige $2n$-hoek is gelijk aan $\frac{1}{2}nrc_n$, met r de straal en c_n de lengte van een zijde van de ingeschreven regelmatige n-hoek.

Liu nam $n = 96$ en $r = 10$ en kreeg $314\frac{64}{625}$ als oppervlakte; dat geeft $\pi \approx 3.141025$

Twee eeuwen later ging Zu Chongzhi (429–500) verder: S_{24576} geeft $\pi \approx 3.1415926$.

Volumes

Nine Chapters, Hoofdstuk 4

Lay down the given number (V). Multiply it by 16; divide it by 9; extract the cube root of the result.

Zo vind je de diameter, d van een bol als het volume, V, gegeven is.

Dus

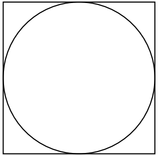
$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{9}V} \text{ ofwel } V = \frac{9}{16}d^3 \text{ of ook } V = \frac{9}{2}r^3$$

Zelfs als $\pi = 3$ klopt dit niet met $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Liu Hui legde uit waarom dat zo was.

Een klassieke som

Neem een kubus met zijde d en zet daar een cilinder in (evenwijdig aan een van de assen).



De verhouding van de oppervlakten van de cirkel en het vierkant is $\pi : 4$.
Dat geldt voor elke dwarsdoorsnede dus ook voor de volumes van de cilinder en de kubus.
Het volume van de cilinder is dus $\frac{\pi}{4}d^3$.

Neem nu een bol in de cylinder.

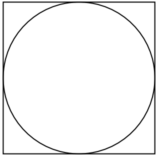
De formule $V = \frac{9}{16}d^3$ voor de bol is, als $\pi = 3$, equivalent met de uitspraak dat volumes van de bol en de cilinder zich (ook) verhouden als $\pi : 4$.

En dat laatste klopt niet.

Een klassieke som

Neem namelijk nog een cilinder evenwijdig aan een andere as
(en dus loodrecht op onze eerste).

De bol zit in de doorsnede van deze twee cilinders:
- het 'dubbele doosdeksel'.
De dwarsdoorsneden van de bol en het dubbele doosdeksel, loodrecht op eeen van de assen, zien er net zo uit als die van cilinder en bol.



Dus: de verhouding van de volumes van bol en dubbele doosdeksel is gelijk aan $\pi : 4$.

Het dubbele doosdeksel is een stuk kleiner dan de cilinder.

Liu Hui kon het volume van het dubbele doosdeksel niet bepalen.
"Laten we dit probleem overlaten aan iemand die de waarheid kan vertellen."

Een klassieke som

Zu Gens (5de/6de eeuw), zoon van Zu Chongzhi, kon het wel.

Wat nu 'het Principe van Cavalieri' heet

If the corresponding section areas of two solids are equal everywhere, then their volumes cannot be unequal.

Hier komt een plaatje