AM2520-H: Wiskunde in China

week 1.6, dinsdag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 6 oktober 2020

Outline

Sea Island Mathematical Manual

Opgave 1

for the purpose of looking at a sea island, erect two poles of the same height, 5 feet, the distance between the front and the rear pole being 1000 feet. Assume that the rear pole is aligned with the front pole. Move 123 feet from the front pole and observe the peak of the island from ground level. Move backward 127 feet from the rear pole and observe the peak from ground level again; the tip of the back pole also coincides with the peak. What is the height of the island and how far is it from the front pole?

Uit de *Nine Chapters*, Hoofdstuk 7

De methode van Overschot en Tekort.

Opgave 17

Een are goed land kost 300 goudstukken; de prijs van 7 aren slecht land is 500. Men heeft 100 aren land gekocht; de prijs was 10.000. Hoeveel goed land is er gekocht en hoeveel slecht?

Oplossing:
Stel er zijn 20 aren goed land en 80 aren slecht, dan is het overschot $1714\frac{2}{7}$.
Als er 10 aren goed en 90 aren slecht land zijn is het dan is het tekort $571\frac{3}{7}$.
Neem nu $20 \times 571\frac{3}{7}$ en $10 \times 1714\frac{2}{7}$ en deel hun som door de som van $571\frac{3}{7} + 1714\frac{2}{7}$.
Het resultaat, $12\frac{1}{2}$ aren, is de hoeveelheid goed land. De hoeveelheid slecht land, $87\frac{1}{2}$ aren, is nu makkelijk te vinden.

Uitleg?

Uit de *Nine Chapters*, Hoofdstuk 7

Uit de *Nine Chapters*, Hoofdstuk 8

Opgave 1

Er zijn drie klassen graan, waarvan drie bossen van de eerste klasse, twee bossen van de tweede en één van de derde 39 eenheden maken. Twee van de eerste, drie van de tweede en één van de derde maken 34 eenheden. En één van de eerste, twee van de tweede en drie van de derde maken 26 eenheden.

Hoeveel eenheden bevat één bos graan van elke klasse?

Uit de *Nine Chapters*, Hoofdstuk 8

De oplossing:
Zet de 3, 2, en 1 bossen en de 39 eenheden rechts. Zet de andere voorwaarden in het midden en links.

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Vermenigvuldig de middelste kolom met de eerste klasse in de rechterkolom en laat meteen weg. Doe het hetzelfde met de linkerkolom. Met wat overblijft van de tweede klasse in de middelste kolom, laat meteen weg.

1	0	3		0	0	3		0	0	3
2	5	2		4	5	2		0	5	2
3	1	1		8	1	1		36	1	1
26	24	39		39	24	39		99	24	39

Uit de *Nine Chapters*, Hoofdstuk 8

Dat is dus eigenlijk Gauss-eliminatie.

De rest van de oplossing is het eenvoudig oplossen van het nieuwe driehoeksstelsel.

Honderd vogels

Ongeveer vijfde eeuw in *Zhang Quijian's Mathematical Manual*:

> *Een haan is 5 munten waard, een hen 3 munten en 3 kuikens 1 munt. Met 100 munten kopen we 100 vogels.*
> *Hoeveel hanen, hennen, en kuikens zijn er?*

Zhang:
4 hanen, 18 hennen, 78 kuikens;
8 hanen, 11 hennen, 81 kuikens;
12 hanen, 4 hennen, 84 kuikens

"Vermeerder de hanen telkens met 4, verminder de hennen telkens met 7, en vermeerder de kuikens telkens met 3"

Dit probleem is beroemd omdat het overal in een of andere vorm opduikt.

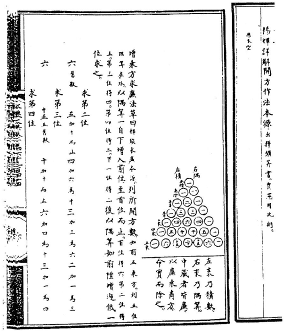
Polynoomvergelijkingen

Midden 11de eeuw: Jia Xian veralgemeniseerde het worteltrekken uit de *Nine Chapters* van $n = 2$ en $n = 3$ naar hogere n met behulp van de driehoek van Pascal.

"Add the numbers in the two places above in order to find the number in the place below."

Het plaatje is van Yang Hui (≈ 1260).

Jia Xian gaf ook oplosmethoden voor willekeurige polynoomvergelijkingen.



Polynoomvergelijkingen

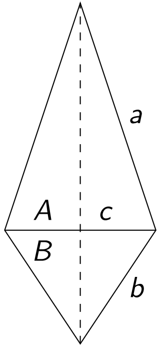
Jia's werk gedetailleerd beschreven door Qin Jiushao in *Shushu jiuzhang* (*Mathematical Treatise in Nine Sections*, 13de eeuw)

Los op: $-x^4 + 763.200x^2 - 40.642.560.000 = 0$
Huh?

Het gaat om de oppervlakte, x, van het stukje land rechts.
Die drukken we natuurlijk zo uit in a, b, en c.
$A = \frac{c}{2}\sqrt{a^2 - (\frac{c}{2})^2}$ en $B = \frac{c}{2}\sqrt{b^2 - (\frac{c}{2})^2}$
Dan voldoet $x = A + B$ aan

$$-x^4 + 2(A^2 + B^2)x^2 - (A^2 - B^2)^2 = 0$$

Neem nu $a = 39$, $b = 25$, en $c = 30$ ...
(Waarom makkelijk als het moeilijk kan?)



Polynoomvergelijkingen

De oplossing gaat als het worteltrekalgoritme:

- Voorspel het aantal cijfers door proberen (3 cijfers)
- Bepaal het eerste cijfer door proberen (8)
- Schrijf $x = 800 + y$ en pas de binomiaalformules toe
- Bepaal het eerste cijfer van y, enzovoort

Dit werd weergegeven op een bord als een soort staartdeling.

Voordeel: men kon gewoon doorgaan met cijfers 'achter de komma'.

Polynoomvergelijkingen

De methode leek wijd verbreid, veel wiskundigen gebruikten hem.

De Chinezen hadden geen problemen met negatieve getallen.

Ze hadden dus maar één soort vergelijking: $f(x) = 0$.

Toch: weinig negatieve oplossingen, want de problemen vroegen altijd om positieve getallen: lengte, oppervlakte, inhoud, ...

Chinese reststelling

Uit *Sunzi suanjing* (*Mathematical Classic of Master Sun*)

Oudst bekende voorbeeld

We hebben dingen waarvan het aantal niet weten;
als we ze in drieën tellen houden we 2 over;
als we ze in vijven tellen houden we 3 over;
als we in zevens tellen houden we 2 over.
Hoeveel dingen zijn er?

Oplossing van Sun Zi:

> *Als je in drieën telt en rest* 2 *heb zet dan* 140 *neer. Als je in vijven telt en rest* 3 *hebt, zet dan* 63 *neer. Als je in zevens telt en rest* 2 *hebt, zet dan* 30 *neer.*
>
> *Tel die getallen op, je krijgt* 233*. Trek hier* 230 *van af, je krijgt* 23*.*

Chinese reststelling

Nadere uitleg:

> *Voor elke eenheid die je overhoudt als je in drieën telt zet je* 70 *neer. Voor elke eenheid die je overhoudt als je in vijven telt zet je* 21 *neer. Voor elke eenheid die je overhoudt als je in zevens telt zet je* 15 *neer.*
> *Als de som* 106 *of meer is trek dan* 105 *af en je hebt je antwoord.*

Verder geen uitleg bekend.

Chinese reststelling

Moderne uitleg:

$$\begin{array}{lll} 70 \equiv 1 \pmod 3 & 70 \equiv 0 \pmod 5 & 70 \equiv 0 \pmod 7 \\ 21 \equiv 0 \pmod 3 & 21 \equiv 1 \pmod 5 & 21 \equiv 0 \pmod 7 \\ 15 \equiv 0 \pmod 3 & 15 \equiv 0 \pmod 5 & 15 \equiv 1 \pmod 7 \end{array}$$

Dus $a \cdot 70 + b \cdot 21 + c \cdot 15$ lost $n \equiv a \pmod 3$, $n \equiv b \pmod 5$, $n \equiv c \pmod 7$ op.

Astronomische cycli

Begin 8ste eeuw loste ene Yi Xing een probleem op gerelateerd aan astronomische cycli op:

$$
\begin{aligned}
N &\equiv 0 \pmod{1.110.343 \times 60} \\
N &\equiv 44.820 \pmod{60 \times 3040} \\
N &\equiv 49.107 \pmod{89.773}
\end{aligned}
$$

Het antwoord: $N = 96.961.740 \times 1.110.343$.

Geen uitleg bekend.

Qin Jiushao en de *Ta-Yen*-regel

13de eeuw: Uitvoerige uitleg van de oplossing van

$$N \equiv 32 \pmod{83}, \qquad N \equiv 70 \pmod{110}, \qquad N \equiv 3 \pmod{27}$$

- Noteer $m_1 = 83$, $m_2 = 110$, en $m_3 = 27$.
- Bepaal $M = 83 \times 110 \times 27 = 246.510$
- Bepaal $M_1 = M/m_1 = 2970$, $M_2 = M/m_2 = 2241$, en $M_3 = M/m_3 = 9130$.
- Bepaal $P_i = M_i \bmod m_i$, dus $P_1 = 65$, $P_2 = 41$, en $P_3 = 4$.
- Los op $P_i x_i \equiv 1 \pmod{m_i}$.
- Oplossing: $32M_1x_1 + 70M_2x_2 + 3M_3x_3$

Qin Jiushao en de *Ta-Yen*-regel

Het oplossen van $P_i x_i \equiv 1 \pmod{m_i}$ ging eigenlijk volgens het Algoritme van Euclides.

Met boekhouding, zodat we getallen s en t vinden met

$$sP_i + tm_i = \mathrm{ggd}(P_i, m_i) = 1$$

Dan s en t aanpassen tot $1 \leqslant s < m_i$, dat is x_i.

Invloed op anderen?

Er is veel overeenkomst tussen de wiskunde in China, en die in India en de Islam, . . .
De Chinezen kenden de ‘Stelling van Pythagoras’ ook (Liu Hui bijvoorbeeld).
maar ook weer verschil
veel methoden tonen kleine verschillen wat het lijkt uit te sluiten dat er overdracht is geweest.
Men weet het gewoon niet.

In de 16de eeuw werden *De Elementen* in het Chinees vertaald.