AM2520-H: Het oplossen van PolynoomVergelijkingen

week 1.7, maandag

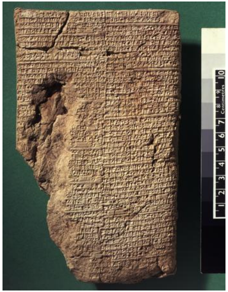
K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 12 oktober 2020

Outline

Babylonië



Tablet BM 13901: vierentwintig kwadratische vergelijkingen met oplossingen

Babylonië

Opgave 1

Ik tel de oppervlakte en zijde van mijn vierkant op: $45'$ (dus $\frac{3}{4}$).

We hebben dus $x^2 + x = \frac{3}{4}$.

Oplossing: halveer $b = 1$, dus $\frac{1}{2}$.
Kwadrateer dat: $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$.
Tel dat op bij de $\frac{3}{4}$: $1 = 1^2$.
Trek de $\frac{1}{2}$ van de wortel van 1 af: $x = \frac{1}{2}$.

Algemeen: om $x^2 + bx = c$ op te lossen
neem $\frac{b}{2}$, kwadrateer het, $(\frac{b}{2})^2$.
tel het op bij c: $Z = (\frac{b}{2})^2 + c$
trek $\frac{b}{2}$ af van $\sqrt{Z}$, dat is de oplossing: $x = \sqrt{Z} - \frac{b}{2}$.

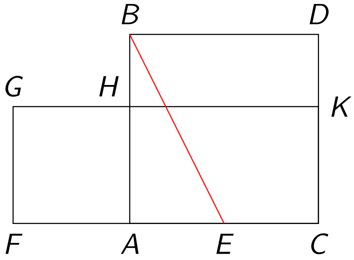
In onze taal $x^2 + bx + (\frac{b}{2})^2 = c + (\frac{b}{2})^2$, ofwel $(x + \frac{b}{2})^2 = c + (\frac{b}{2})^2$

Griekenland

Meetkundig

Elementen, Boek II, Propositie 11

Snijd een gegeven lijnstuk zó dat de rechthoek opgespannen door het geheel en één van de stukken gelijk is aan het vierkant opgespannen door het andere stuk.



In formule: $a(a-x)=x^2$, ofwel $x^2+ax=a^2$, met $a=AB$ en $x=AH$.

Griekenland

De *Arithmetica* van Diophantus ($\approx$ 350 AD)

Vergelijkingen met één of meerdere onbekenden ("Diophantische vergelijkingen")

- notatie voor veeltermen:

$$K^Y \alpha \varsigma \gamma \pitchfork \Delta^Y \gamma \mathring{M} \alpha \text{ for } x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

  "Eén (α) derde macht (K^Y), drie (γ) getallen (ζ),
  verminderd met (Λ) drie (γ) kwadraten (Δ^Y) en één (α) eenheid ($\mathring{\mathrm{M}}$)"

- regels voor rekenen met machten: $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
- regels voor rekenen met negative getallen: $-a \cdot -b = ab$

al-Khwarizmi

- het tientallige stelsel
- verschuiving van meetkunde naar algebra
- kwadratische vergelijkingen als vergelijkingen
  - nog wel gevalsonderscheiding
  - wel/geen oplossing ($D > 0$ versus $D < 0$)
- de rechtvaardiging was nog wel meetkundig

al-Khwarizmi en al-Khayyami

Verdere ontwikkelingen:

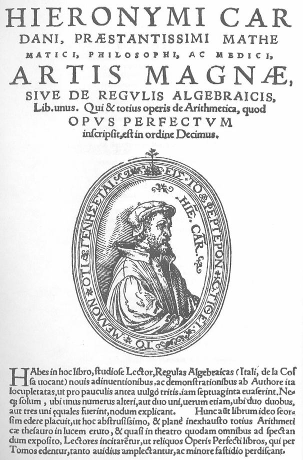
- perfectionering theorie kwadratische vergelijkingen (800-1000)
- ‘incommensurabele grootheden’ als irrationale getallen (1000)
- 3degraads vergelijkingen
  - verdubbeling van de kubus
  - verdeling van de bol in delen met gegeven verhouding
- oplossing met doorsnijding van kegelsneden (1000-1100)
- recursieve definitie $x^{n+1} = x \cdot x^n$ en algebraïsche manipulaties met polynomen (1150)

Methoden

- lineaire vergelijkingen (tekort en overschot)
- stelsels lineaire vergelijkingen (eliminatie)
- polynoomvergelijkingen (numeriek)

De Derdegraadsvergelijking

Nicolò Tartaglia



HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inſcripſit, eſt in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, ſtudioſe Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Coſſa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonſtrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam ſeptuaginta euaſerint. Neq; ſolum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aūt librum ideo ſeorſim edere placuit, ut hoc abſtruſiſſimo, & planè inexhauſto totius Arithmeticæ theſauro in lucem eruto, & quaſi in theatro quodam omnibus ad ſpectandum expoſito, Lectores incitarētur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore faſtidio perdiſcant.

Geralomo Cardano

De Derdegraadsvergelijking

Tartaglia (1499/1500–1557) kende de oplossing van $x^3 + ax = b$.

Cardano (1501–1576) wilde die leren en kreeg uiteindelijk de uitleg van Tartaglia. Onder de belofte dat hij het niet als eerste zou publiceren.

Cardano werkte de methode uit en paste hem toe op andere gevallen.
Zijn student, Lodovico Ferrari, kon, met behulp van de methode van Tartaglia ook vierdegraadsvergelijkingen oplossen.

Toen Cardano er achter kwam dat Scipione del Ferro ook de derdegraadsvergelijking op kon lossen vond hij dat hij de methode kon publiceren in het boek *Ars Magna*.

De Derdegraadsvergelijking, de methode

De vergelijking is $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

Stap 1: werk de kwadratische term weg.

Stel $x = y - \frac{1}{3}a$ en vul in:

$$\left(y - \frac{1}{3}a\right)^3 + a\left(y - \frac{1}{3}a\right)^2 + b\left(y - \frac{1}{3}a\right) + c$$

wordt

$$y^3 + \left(-\frac{1}{3}a^2 + b\right)y + \frac{2}{9}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$$

Dus op te lossen

$$y^3 + py + q = 0$$

De Derdegraadsvergelijking, de methode

Stap 2: De vergelijking is nu $y^3 + py + q = 0$.

Substitueer: $y = u + v$.
Er komt

$$\begin{aligned}(u+v)^3 + p(u+v) + q &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q \\ &= u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u+v)\end{aligned}$$

Stel nu dat $3uv + p = 0$, dan krijgen we ook $u^3 + v^3 + q = 0$.

De Derdegraadsvergelijking, de methode

We krijgen een stelsel

$$\begin{aligned} u^3 v^3 &= -\frac{1}{27} p^3 \\ u^3 + v^3 &= -q \end{aligned}$$

Stap 3: los op naar u^3 en v^3.
Dat geeft u en v, en dus $y = u + v$, en daarmee $x = y - \frac{1}{3} a$.

Voorbeeld: $x^3 - 9x^2 + 20x - 12 = 0$

- Substitueer $x = y + 3$: er komt $y^3 - 7y - 6 = 0$.
- Substitueer $y = u + v$: er komt $u^3v^3 = \frac{7^3}{3^3}$ en $u^3 + v^3 = 6$.
  - u^3 en v^3 zijn oplossingen van $t^2 - 6t + \frac{7^3}{3^3} = 0$
  - die vergelijking wordt $(t-3)^2 = -\frac{100}{3^3}$
  - oplossingen: $t = 3 \pm \frac{10}{9}\sqrt{-3}$
  - zeg $u^3 = 3 + i\frac{10}{9}\sqrt{3}$ en $v^3 = 3 - i\frac{10}{9}\sqrt{3}$
- OK, $y = \sqrt[3]{3 + i\frac{10}{9}\sqrt{3}} + \sqrt[3]{3 - i\frac{10}{9}\sqrt{3}}$ en nu?
- $u_1 = \frac{3}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}$ en $v_1 = \frac{3}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}}$ dus $y_1 = 3$

Er is valsgespeeld

Voorbeeld: $x^3 - 9x^2 + 20x - 12 = 0$

Andere waarden voor u en v krijgen we door te vermenigvuldigen met $\omega = e^{\frac{2}{3}\pi i}$.

$u_2 = u_1 \cdot \omega$ en $u_3 = u_1 \cdot \omega^2$ en $v_2 = v_1 \cdot \omega$ en $v_3 = v_1 \cdot \omega^2$;

Alleen $u_1 + v_1$, $u_2 + v_3$ en $u_3 + v_2$ geven oplossingen.

Waarom? Wegens de eis $3uv = 7$.