AM2520-H: Het oplossen van PolynoomVergelijkingen, II

week 1.7, dinsdag

K. P. Hart

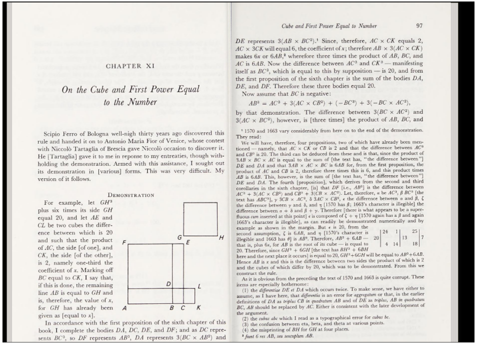
Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 13 oktober 2020

Outline

Cardano's *Ars Magna*

"Scipio Ferro van Bologna ontdekte deze regel bijna dertig jaar geleden en gaf hem door aan Antonio Maria Fior van Venetië, wiens wedstrijd met Niccolò Tartaglia van Brescia aan Niccolò een reden deze te ontdekken. Hij [Tartaglia] gaf hem aan mij als reactie op mijn smeekbeden, doch zonder bewijs. Gewapend met deze hulp, zocht ik het bewijs in [diverse] vormen. Dit was erg moeilijk. Hier volgt mijn versie."



CHAPTER XI

On the Cube and First Power Equal to the Number

Scipio Ferro of Bologna well-nigh thirty years ago discovered this rule and handed it on to Antonio Maria Fior of Venice, whose contest with Niccolò Tartaglia of Brescia gave Niccolò occasion to discover it. He [Tartaglia] gave it to me in reponse to my entreaties, though withholding the demonstration. Armed with this assistance, I sought out its demonstration in [various] forms. This was very difficult. My version of it follows.

DEMONSTRATION

For example, let GH^3 plus six times its side GH equal 20, and let AE and CL be two cubes the difference between which is 20 and such that the product of AC, the side [of one], and CK, the side [of the other], is 2, namely one-third the coefficient of x. Marking off BC equal to CK, I say that, if this is done, the remaining line AB is equal to GH and is, therefore, the value of x, for GH has already been given as [equal to x].

In accordance with the first proposition of the sixth chapter of this book, I complete the bodies DA, DC, DE, and DF; and as DC represents BC^3, so DF represents AB^3, DA represents $3(BC \times AB^2)$ and

Cube and First Power Equal to Number 97

DE represents $3(AB \times BC^2)$.[1] Since, therefore, $AC \times CK$ equals 2, $AC \times 3CK$ will equal 6, the coefficient of x; therefore $AB \times 3(AC \times CK)$ makes $6x$ or $6AB$,[2] wherefore three times the product of AB, BC, and AC is $6AB$. Now the difference between AC^3 and CK^3 — manifesting itself as BC^3, which is equal to this by supposition — is 20, and from the first proposition of the sixth chapter is the sum of the bodies DA, DE, and DF. Therefore these three bodies equal 20.

Now assume that BC is negative:

$$AB^3 = AC^3 + 3(AC \times CB^2) + (-BC^3) + 3(-BC \times AC^2),$$

by that demonstration. The difference between $3(BC \times AC^2)$ and $3(AC \times BC^2)$, however, is [three times] the product of AB, BC, and

[1] 1570 and 1663 vary considerably from here on to the end of the demonstration. They read:

We will have, therefore, four propositions, two of which have already been mentioned — namely, that $AC \times CK$ or CB is 2 and that the difference between AC^3 and CB^3 is 20. The third can be deduced from these and is that, since the product of $3AB \times BC \times AC$ is equal to the sum of [the text has, "the difference between"] DE and DA and that $3AB \times AC \times BC$ is $6AB$ for, from the first proposition, the product of AC and CB is 2, therefore three times this is 6, and this product times AB is $6AB$. This, however, is the sum of [the text has, "the difference between"] DE and DA. The fourth [proposition], which derives from the second and third corollaries in the sixth chapter, [is] that DF [i.e., AB^3] is the difference between $AC^3 + 3(AC \times CB^2)$ and $CB^3 + 3(CB \times AC^2)$. Let, therefore, α be AC^3, β BC^3 [the text has ABC^3], γ $3CB \times AC^2$, δ $3AC \times CB^2$, ϵ the difference between α and β, ζ the difference between γ and δ, and η [1570 has β; 1663's character is illegible] the difference between $\alpha + \delta$ and $\beta + \gamma$. Therefore [there is what appears to be a superfluous *cum* inserted at this point] ϵ is composed of $\zeta + \eta$ [1570 again has a β and again 1663's character is illegible], as can readily be demonstrated numerically and by example as shown in the margin. But ϵ is 20, from the second assumption, ζ is $6AB$, and η [1570's character is illegible and 1663 has θ] is AB^3. Therefore, $AB^3 + 6AB$ — that is, plus $6x$, for AB is the root of its cube — is equal to 20. Therefore, since $GH^3 + 6GH$ [the text has $BH^3 + 6BH$ here and the next place it occurs] is equal to 20, GH^3+6GH will be equal to AB^3+6AB. Hence AB is x and this is the difference between two sides the product of which is 2 and the cubes of which differ by 20, which was to be demonstrated. From this we construct the rule.

$$20\left|\begin{matrix}24 & 1\\ & \\ 4 & 14\end{matrix}\right| 13 \left|\begin{matrix}25\\ \\ 18\end{matrix}\right| 7$$

As it is obvious from the preceding the text of 1570 and 1663 is quite corrupt. These items are especially bothersome:

(1) the *differentiae DE et DA* which occurs twice. To make sense, we have either to assume, as I have here, that *differentia* is an error for *aggregatum* or that, in the earlier definitions of DA as *triplus CB in quadratum AB* and of DE as *triplus, AB in quadratum BC*, AB should be replaced by AC. Either is consistent with the later development of the argument.

(2) the *cubus abc* which I read as a typographical error for *cubus bc*.

(3) the confusion between eta, beta, and theta at various points.

(4) the misprinting of BH for GH at four places.

[2] *fiunt 6 res AB, seu sexcuplum AB.*

Dit staat aan het begin van Hoofdstuk XI:
"*On the Cube and First Power Equal to the Number*"
Hoofdstukken XI – XXIII behandelen allemaal verschillende gevallen van derdegraadsvergelijkingen.

Cardano's *Ars Magna*

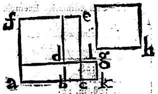
CAPVT XI.

De Cubo & rebus æqualibus Numero.

SCIPIO Ferreus Bononienſis iam annis ab hinc triginta fermè capitulum hoc inuenit, tradidit verò Anthonio Mariæ Florido Veneto, qui cùm in certamen cum Nicolao Tartalea Brixellenſe aliquando veniſſet, occaſionem dedit, vt Nicolaus inuenerit & ipſe, qui cum nobis rogantibus tradidiſſet, ſuppreſſa demonſtratione, freti hoc auxilio, demonſtrationem quæſiuimus, eámque in modos, quod difficillimum fuit, redactam ſic ſubiiciemus.

DEMONSTRATIO.

Sit igitur exempli cauſa cubus g h, & ſexcuplum lateris g h æquale 20. & ponam duos cubos a e & c l, quorum differentia ſit 20. ita quod productum a c lateris, in



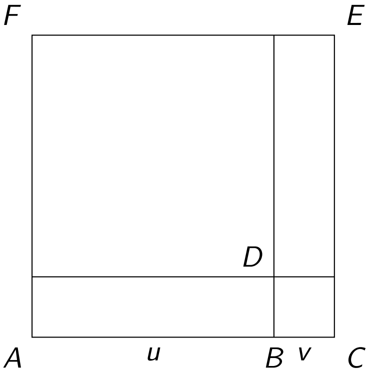
Een Latijnse versie van *Ars Magna* staat op BrightSpace.

Cardano's *Ars Magna*

Hoofdstuk XII: De vorm $x^3 = ax + b$.

Laat de derde macht gelijk zijn aan de eerste macht en constant en laat DC en DF twee kubussen zijn waarvan het product van de zijden, AB en BC, gelijk is aan een derde van de coëfficiënt van x, en laat de som van de kubussen gelijk zijn aan de constante. Ik zeg dat AC de waarde van x is.

AB is onze u, en BC is onze v.



Cardano's *Ars Magna*

Hoofdstuk XII, voorbeeld

"Exemplum, cubus æquator 6. rebus ṕ. 40"

Neem de derde macht van 2, één-derde van de coëfficiënt van x, dat geeft 8.
Trek dat af van 400, het kwadraat van 20, de helft van de constante, dat geeft 392; de wortel hiervan opgeteld bij 20 geeft $20+\sqrt{392}$, en afgetrokken van 20 geeft dat $20-\sqrt{392}$; en de sum van de derdemachtswortels van dezen, $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$, is de waarde van x.

(De Latijnse tekst is meer ingedikt, en noemt geen x.)

De vergelijking was natuurlijk $x^3=6x+40$.

Kennelijk geldt $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}=4$

De Vierdegraadsvergelijking

Oplossing van $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$:

Stap 1: Substitueer $x = y - \frac{1}{4}a$ en breng de vergelijking in de vorm $x^4 + px^2 + qx + r = 0$.

Stap 2: Zij y een nieuwe variable. Dan geldt:

$$\begin{aligned}(x^2 + y)^2 &= x^4 + 2x^2y + y^2 \\ &= -px^2 - qx - r + 2x^2y + y^2 \\ &= (2y - p)x^2 - qx + (y^2 - r).\end{aligned}$$

De Vierdegraadsvergelijking

Stap 3: Links staat een kwadraat. Om rechts ook een kwadraat te krijgen stellen we de discriminant gelijk aan 0:

$$q^2 - 4(2y - p)(y^2 - r) = 0$$

Dit geeft een derdegraadsvergelijking in y.

Stap 4: Los die vergelijking op, en stel y gelijk aan een oplossing. Dan hebben we

$$\begin{aligned}(x^2 + y)^2 &= (2y - p)x^2 - qx + (y^2 - r)\\ &= A(x - B)^2\end{aligned}$$

met

$$A = 2y - p \text{ en } B = \frac{q}{2(2y - p)}$$

De Vierdegraadsvergelijking

Stap 5: Los

$$x^2 + y = \pm\sqrt{A}(x - B)$$

op naar x.

François Viète (1540–1603)

François Viète ontwikkelde notatie voor vergelijkingen met algemene coëfficiënten.

In Viétes notatie: de oplossing van

$$A \,\mathrm{quad} + B2 \text{ in } A \text{ equalis } Z \,\mathrm{plane}$$

is

$$A \text{ is } \ell.\overline{Z \,\mathrm{plane} + B \,\mathrm{quad}} - B$$

De oplossing van $x^2 + 2bx = z$ is $\sqrt{z + b^2} - b$

Newton, *Arithmetica Universalis* (1707)

Relaties tussen de nulpunten t_1, t_2, en t_3 van een derdegraadspolynoom $x^3 - ax^2 + bx - c$:

$$
\begin{aligned}
t_1 + t_2 + t_3 &= a \\
t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 &= a^2 - 2b \\
t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 &= b \\
t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 &= a^3 - 3ab + 3c \\
t_1^2 t_2 + t_2^2 t_3 + t_3^2 t_1 &= ab - 3c \\
t_1 t_2 t_3 &= c \\
t_1^4 + t_2^4 + t_3^4 &= a^2 - 4a^2 b + 2b^2 + 4ac
\end{aligned}
$$

enzovoort, enzovoort

Symmetrische polynomen

Herinner $(t-u^3)(t-v^3) = t^2 - (u^3+v^3)t + u^3v^3$.

Nu $(x-t_1)(x-t_2)(x-t_3)$ uitwerken geeft

$$x^3 - (t_1+t_2+t_3)x^2 + (t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1)x - t_1t_2t_3$$

Deze drie zijn dus belangrijk

$$\begin{aligned} t_1+t_2+t_3 &= a \\ t_1t_2+t_2t_3+t_3t_1 &= b \\ t_1t_2t_3 &= c \end{aligned}$$

dit zijn de elementaire symmetrische polynomen van graad 1, 2, en 3 in t_1, t_2, en t_3.

Symmetrische polynomen

Stelling

Elk symmetrisch polynoom is te schrijven als een polynoom in symmetrische polynomen.

Voorbeeld

Het polynoom $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2$ is symmetrisch, en gelijk aan

$$(t_1 + t_2 + t_3)^2 - 2(t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1)$$

Dat is te schrijven als $q(t_1 + t_2 + t_3, t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1)$, met $q(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_2$.

Nou èn?

Symmetrische polynomen

Stelling

Ieder symmetrisch polynoom in de nulpunten $t_1, \ldots, t_n$ van een ndegraadspolynoom is te schrijven als polynoom in de coëfficiënten van dat polynoom.

Dus, bij $x^3 - ax^2 + bx - c$ hebben we gezien dat $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = a^2 - 2b$ (dat was $q(a, b)$).

Lagrange en Vandermonde

Een nieuwe aanpak van $x^3 - ax^2 + bx - c$.

Neem de nulpunten: t_1, t_2, en t_3.
Neem $\omega = e^{\frac{2}{3}\pi i} = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}$, een derdemachtseenheidswortel ($\omega^3 = 1$, $\omega \neq 1$).
Neem

$$y_1 = t_1 + \omega t_2 + \omega^2 t_3$$
$$y_2 = t_1 + \omega^2 t_2 + \omega t_3$$

Lagrange en Vandermonde

Cyclisch permuteren van de t_i, via $(1\,2\,3)$, geeft

$$\begin{aligned} t_2 + \omega t_3 + \omega^2 t_1 &= \omega^2 y_1 \\ t_3 + \omega t_1 + \omega^2 t_2 &= \omega y_1 \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} t_2 + \omega^2 t_3 + \omega t_1 &= \omega y_2 \\ t_3 + \omega^2 t_1 + \omega t_2 &= \omega^2 y_2 \end{aligned}$$

Dus: y_1^3 en y_2^3 zijn invariant onder cyclische permutaties.

Lagrange en Vandermonde

- De permutatie $(2\,3)$ verwisselt y_1 en y_2.
- $(1\,2\,3)$ en $(2\,3)$ genereren alle permutaties
- $\omega \mapsto \omega^2$ verwisselt ook y_1 en y_2

Dus: $y_1^3 + y_2^3$ en $y_1^3 y_2^3$ zijn symmetrische polynomen in de t_i.

Dus

$$\begin{aligned} y_1^3 + y_2^3 &= p(a, b, c) \\ y_1^3 \cdot y_2^3 &= q(a, b, c) \end{aligned}$$

voor zekere polynomen p en q.

Lagrange en Vandermonde

We kunnen y_1^3 en y_2^3 dus vinden als nulpunten van een tweedegraadspolynoom.
Na worteltrekken hebben we y_1 en y_2.
En dan: via

$$
\begin{aligned}
a &= t_1 + t_2 + t_3 \\
y_1 &= t_1 + \omega t_2 + \omega^2 t_3 \\
y_2 &= t_1 + \omega^2 t_2 + \omega t_3
\end{aligned}
$$

kunnen we t_1, t_2, en t_3 bepalen.

Dat is makkelijker dan het lijkt: gebruik $1 + \omega + \omega^2 = 0$.

Lagrange en Vandermonde

De oplossingen

$$
\begin{aligned}
t_1 &= \frac{1}{3}(a + y_1 + y_2) \\
t_2 &= \frac{1}{3}(a + \omega^2 y_1 + \omega y_2) \\
t_3 &= \frac{1}{3}(a + \omega y_1 + \omega^2 y_2)
\end{aligned}
$$

Waar zit de pijn?
In het vinden van de polynomen $p(a, b, c)$ en $q(a, b, c)$.

In het geval $a = 0$ hebben we zoiets al gezien: $u^3 + v^3 = c$ en $u^3 v^3 = -(\frac{b}{3})^3$

Vierdegraadsvergelijking

In het kort: $x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$.
Weer: de nulpunten zijn t_1, t_2, t_3, en t_4.
Bekijk

$$\begin{aligned} y_1 &= (t_1 + t_2)(t_3 + t_4) \\ y_2 &= (t_1 + t_3)(t_2 + t_4) \\ y_3 &= (t_1 + t_4)(t_2 + t_3) \end{aligned}$$

- y_1, y_2, en y_3 zijn alle invariant onder de permutaties $(1\,2)(3\,4)$, $(1\,3)(2\,4)$, en $(1\,4)(2\,3)$
- Iedere $\sigma \in S_4$ permuteert y_1, y_2, en y_3

Vierdegraadsvergelijking

De coëfficiënten van $(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3)$ zijn dus symmetrisch in t_1, t_2, t_3, en t_4. En dus polynomen in a, b, c, en d.

Los die derdegraadsvergelijking op: geeft y_1, y_2, en y_3.

We kennen dus nu:

$$\begin{aligned}
(t_1 + t_2)(t_3 + t_4) &= y_1 \\
(t_1 + t_3)(t_2 + t_4) &= y_2 \\
(t_1 + t_4)(t_2 + t_3) &= y_3 \\
t_1 + t_2 + t_3 + t_4 &= a
\end{aligned}$$

Vierdegraadsvergelijking

Nu drie tweedegraadsvergelijkingen oplossen

$$(x - (t_1 + t_2))(x - (t_3 + t_4)) = x^2 - ax + y_1 = 0$$

en nog zo twee.

Dat geeft $t_1 + t_2$, $t_3 + t_4$ $t_1 + t_3$, $t_2 + t_4$ $t_1 + t_4$, en $t_2 + t_3$.

Gebruik nu

$$2t_1 + a = (t_1 + t_2) + (t_1 + t_3) + (t_1 + t_4)$$

om t_1 te bepalen en dan de rest.

Vijfdegraadsvergelijking

Vandermonde en Lagrange hoopten langs deze weg ook de vijfdegraadsvergelijking aan te kunnen pakken.

Stelling (Ruffini-Abel)

Voor de vijfdegraadsvergelijking is er geen oplosmethode met behulp van de lichaamsoperaties en worteltrekken (van alle machten).

Heel kort door de bocht:
bij de vijfdegraadsvergelijking zit er zo veel (of weinig) symmetrie in de oplossingen dat zo'n methode 5! oplossingen op moet leveren.

Voor wie het precies wil weten: Algebra 3 in Leiden behandelt de hieruit voortgevloeide theorie: *Galoistheorie*.

Passer en latje

Toepassing van de Galoistheorie.

Drie van de overgebleven problemen van de Grieken hebben als oplossing: "kan niet". Begin met de punten $(0, 0)$ en $(1, 0)$ in het vlak en herhaal de legale stappen uit *de Elementen*:

- trek een lijn door twee reeds gevonden punten
- trek een cirkel om een gevonden punt en door een ander gevonden punt
- noteer alle snijpunten van de lijnen en cirkels uit de vorige stappen

Een punt (a, b) dat op deze manier verschijnt noemen we *construeerbaar*.

Passer en latje

Stelling

Als (a, b) construeerbaar is dan zijn er polynomen met rationale coëfficiënten waar a en b nulpunten van zijn en de minimale graad van zo'n polynoom is een macht van 2.

- $(\sqrt[3]{2}, 0)$ is niet construeerbaar: de graad van $x^3 - 2$ is geen macht van 2
- $(\cos\frac{\pi}{9}, \sin\frac{\pi}{9})$ is niet construeerbaar: $\cos\frac{\pi}{9}$ is nulpunt van $8x^3 - 6x - 1$ en 3 is geen macht van 2
  $(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3})$ is wel construeerbaar
  Conclusie: de hoek $\frac{\pi}{3}$ is niet met passer en latje in drieën te delen.
- En π is helemaal geen nulpunt van een polynoom met rationale coëfficiënten ...

Ten slotte

Stelling (Hoofdstelling van de Algebra)

Elk polynoom met complexe coëfficiënten heeft een complex nulpunt.

- Formulering: Girard (1629) (nog geen bewijs)
- Pogingen: d'Alembert, Euler, Lagrange, Laplace, ...
- Eerste bewijzen: Gauss (1799, onvolledig), Argand (1806), Gauss (1816)