AM2520-H: Een beknopte geschiedenis van π, II

week 1.10, maandag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 2 november 2020

Outline

Getaltheorie

Cesàro en Sylvester (1883) (?)

Kies willekeurig twee natuurlijke getallen.
De kans dat ze relatief priem zijn is gelijk aan $\frac{6}{\pi^2}$.

Idee van het bewijs.

De kans dat een getal door het priemgetal p deelbaar is is $\frac{1}{p}$.
De kans dat twee getallen door p deelbaar zijn is $\frac{1}{p^2}$.
De kans dat twee getallen *niet* beide door p deelbaar zijn is dus $1 - \frac{1}{p^2}$.
De kans dat twee getallen geen gemeenschappelijke priemfactoren hebben is dus

$$\prod_{p \text{ priem}} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \left(\prod_{p \text{ priem}} \frac{1}{1 - p^{-2}}\right)^{-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{-1} = \frac{6}{\pi^2} \quad \square$$

Kansrekening

De normale verdeling (Abraham de Moivre):

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$$

of

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Toen De Moivre dit aan een kennis uitlegde was de vraag wat die π was?

"Wat heeft de verhouding omtrek:diameter met kansverdelingen te maken?"

Ramanujan

Erg indrukwekkend:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{99^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{1103 + 26390n}{396^{4n}}$$

en efficiënt:

$$p(0) = 3.141592{\color{red}7300133056603139961890252155186}00$$

$$p(1) = 3.14159265358979387799890582630601309421\color{red}{8}$$

$$p(2) = 3.14159265358979323846264906570275889815\color{red}{6}$$

$$p(3) = 3.14159265358979323846264338327955527316\color{red}{1}$$

Recursie

Gauss, Legendre, Salamin, Brent:

Begin met: $a_0 = 1$, $b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, en $s_0 = \frac{1}{4}$.

Vervolgens:

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}) \text{ en } b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$$

En verder

$$s_n = s_{n-1} - 2^{n-1}(a_n - a_{n-1})^2 \text{ en } p_n = \frac{a_n^2}{s_n} \text{ of beter: } q_n = \frac{(a_n + b_n)^2}{4s_n}$$

Dan

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} q_n = \pi$$

Recursie

Uit het artikel van Brent: zeer snelle convergentie

n	$p_n - \pi$	$\pi - q_n$
0	8.6×10^{-1}	2.3×10^{-1}
1	4.6×10^{-2}	1.0×10^{-3}
2	8.8×10^{-5}	7.4×10^{-9}
3	3.1×10^{-10}	1.8×10^{-19}
4	3.7×10^{-21}	5.5×10^{-41}
5	5.5×10^{-43}	2.4×10^{-84}
6	1.2×10^{-86}	2.3×10^{-171}
7	5.8×10^{-174}	1.1×10^{-345}
8	1.3×10^{-348}	1.1×10^{-694}
9	6.9×10^{-698}	6.1×10^{-1393}

Recursie

Achtergrond: als je begint met $a_0 = 1$ en $b_0 = \cos\varphi$ dan convergeren a_n en b_n naar

$$\frac{\pi}{2K(\sin\varphi)}$$

waarbij

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}}$$

Met wat extra werk en gebruik van

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

Kun je bewijzen dat de limieten inderdaad gelijk zijn aan π.

Cijfer voor cijfer

Bailey, Borwein, Plouffe (1997):

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right)$$

wat is hier bijzonder aan?

Hiermee kun je elk willekeurig *hexa-decimaal* cijfer individueel bepalen,
en dus ook elk gewenst *binair* cijfer.

Plouffe heeft ook een methode om elke gewenste decimaal individueel te berekenen.
(Niet formeel gepubliceerd.)

π is irrationaal

Lambert (1768)

Als x rationaal is dan is $\tan x$ irrationaal.

Bewijs.

Via een kettingbreuk:

$$\tan x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \ddots}}}} \qquad \square$$

Er zijn veel bewijzen in omloop.
De 'makkelijkste' construeren een rij positieve gehele getallen (integralen) die naar nul convergeert

π is transcendent

Lindemann, 1882

Ist z eine von Null verschiedene rationale oder algebraisch irrationale Zahl, so ist e^z immer transscendent.

Also auch insbesondere:

Die Ludolph'sche Zahl π ist eine transscendente Zahl. (Damit steht zugleich fest, dass die Quadratur des Kreises constructiv unausführbar ist.)

Open probleem

Is π normaal?

Een getal, x in $(0,1)$, is *normaal* in basis 10 als elk eindig rijtje decimalen met de juiste frequentie voorkomt:
Gegeven $d = d_1 d_2 \dots d_k$ laten we $f_n(d,x)$ het aantal malen zijn dat d voorkomt in de eerste n decimalen van x; dan is de *frequentie* van d in x gelijk aan

$$f(d,x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} f_n(d)$$

als die bestaat.

Normaal in basis 10 betekent dus dat $f(d,x) = 10^{-k}$ voor elke rijtje van k decimalen.

Open probleem

Een getal is *normaal* als het normaal is in elke basis.
(Normaal in basis 2, basis 3, ..., basis 10^{100}, ...)

Bijna alle getallen zijn normaal: ze vormen een verzameling van maat 1.

Dat bewijs is niet zo moeilijk (als je wat maattheorie kent ...)

Voor individuele getallen is het vrijwel onbegonnen werk vast te stellen of het normaal is.

Practische zaken

Zie Brightspace (vandaag) voor de link naar een antwoord op een vraag aan NASA-JPL:

> *For JPL's highest accuracy calculations, which are for interplanetary navigation, we use* 3.141592653589793.

Zie de link voor wat extreme voorbeelden van berekeningen.

Op de schaal van straal en omtrek van de aarde is de afwijking in de orde van grootte van een molekuul.

Waarom?

In de toepassingen van de (driehoeks)meetkunde moest stevig vermenigvuldigd worden.

Sinustabellen, of beter koordentabellen, gingen tot zeven/acht cijfers.

Dat waren overigens gehele getallen omdat de straal als $10^7/10^8$ werd genomen.

Waarom?

Bekende truc: $4.378.118 \times \mathrm{Sin}(27^\circ 15' 22'')$

Gebruik

$$2\,\mathrm{Sin}\,\alpha\ \mathrm{Sin}\,\beta = R\,\mathrm{Cos}(\alpha+\beta) - R\,\mathrm{Cos}(\alpha-\beta)$$

Zoek α met $\mathrm{Sin}\,\alpha = 2.189.109$ en bepaal $\mathrm{Cos}(\alpha+\beta) - \mathrm{Cos}(\alpha-\beta)$ met behulp van de tabel.
Klein nadeel: eindigt in zeven nullen.
Of toch niet? Denk aan significante cijfers.

Andere bron: opmerken dat $2^m \cdot 2^n = 2^{m+n}$, dus vermenigvuldigen is optellen.
Niet praktisch want er zitten grote gaten tussen die machten ...

Waarom?

John Napier (1550–1617) en Jobst Bürgi (1552–1632) krgen hetzelfde idee: maak een uitgebreide tabel die vermenigvuldigen reduceert tot optellen (en niet alleen van machten van 2).

Napier's werk kwam het eerst uit.

Logaritmen maken

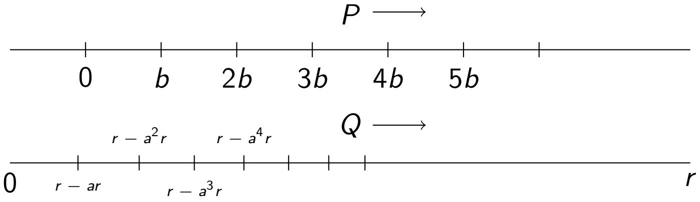
Napier publiceerde twee boeken:

1614 *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*
(Description of the Wonderful Canon of Logarithms).
Het boek met de tabellen.

1619 *Mirifici logarithmorum canonis constructio*
(Construction of the Wonderful Canon of Logarithms).
Het boek met de theorie achter de tabellen.

Logaritmen maken

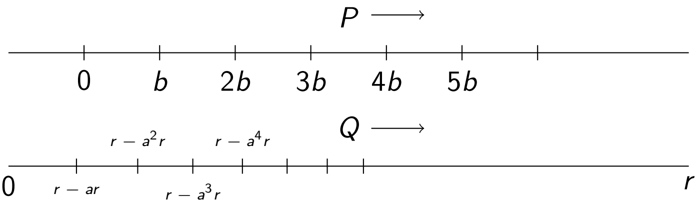
Napier begon met twee lijnen



Het punt P beweegt 'arithmetisch' (eenparig) van links naar rechts, doet dus over elk interval $[0, b]$, $[b, 2b]$, $[2b, 3b]$, ..., even lang.

Het punt Q beweegt 'meetkundig': met veranderlijke snelheid en wel zo dat het even lang doet over elk interval $[0, r - ar]$, $[r - ar, r - a^2 r]$, $[r - a^2 r, r - a^3 r]$, ...

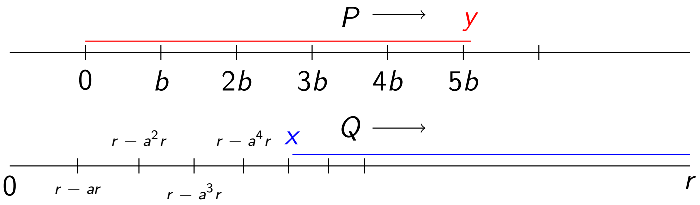
Logaritmen maken



Het punt Q beweegt niet met eenparig over elk intervalletje; de discrete eis van de vorige slide wordt gladgestreken tot: de snelheid van Q is recht evenredig met zijn afstand tot het *rechter eindpunt*.

> *the logarithm of a given sine is that number which has increased arithmetically with the same velocity throughout as that with which radius began to decrease to the given*

Logaritmen maken



the logarithm of a given sine is that number which has increased arithmetically with the same velocity throughout as that with which radius began to decrease to the given

In dit plaatje is y dus de logaritme van x. Notatie $y = \mathrm{Nlog}\, x$.

Even vertalen

Er geldt: y beweegt eenparig met beginsnelheid die van x, en dat is r. Dus $y = rt$.

De evenredigheid van de snelheid van x geeft eigenlijk $x' = -x$, en met $x(0) = r$ krijgen we $\ln x = -t + \ln r$, of $t = \ln \frac{r}{x}$.

Met $y = rt$ komt er dus

$$\operatorname{Nlog} x = y = r \ln \left(\frac{r}{x}\right)$$

En dat is een gewone logaritme.

Er geldt hier $\operatorname{Nlog} r = 0$ (meteen uit de definitie).
Napier hield dat zo, voor het gemak.

Het gebruik

Veelal in driehoeksmeetkunde: zijden en hoeken bepalen als bepaalde zijden en hoeken gegeven zijn.

Veelgebruikt:

$$\text{als } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ dan } \ \mathrm{Nlog}\,\alpha - \mathrm{Nlog}\,\beta = \mathrm{Nlog}\,\gamma - \mathrm{Nlog}\,\delta$$

Met ook toepassingen bij het berekenen van logaritmen:

$$\text{als } x : y = y : z \text{ dan } 2\,\mathrm{Nlog}\,y = \mathrm{Nlog}\,x + \mathrm{Nlog}\,z$$

Als je $\mathrm{Nlog}\,x$ en $\mathrm{Nlog}\,z$ hebt heb je ook $\mathrm{Nlog}\,\sqrt{xz}$

Het gebruik

Veel problemen vragen naar de vierde proportionaal: gegeven x, y, En z bepaal w zó dat $x : y = z : w$. Dat loopt uit op

$$\mathrm{Nlog}\, w = \mathrm{Nlog}\, y + \mathrm{Nlog}\, z - \mathrm{Nlog}\, x$$

Voorbeeld

Gegeven een rechthoekige driehoek met hypothenusa c en rechthoekszijde a.
Wat is de hoek α tegenover a?

Oplossing

We hebben $\frac{\mathrm{Sin}\,\alpha}{r} = \frac{a}{c}$, dus $\mathrm{Nlog}\,\mathrm{Sin}\,\alpha = \mathrm{Nlog}\, a - \mathrm{Nlog}\, c + \mathrm{Nlog}\, r$.

Het gebruik

Voorbeeld

In een driehoek zijn zijden a en b, en de ingesloten hoek γ gegeven. Bepaal de andere hoeken: α en β.

Oplossing

Gebruik de tangensregel:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\tan \frac{1}{2}(\alpha-\beta)}$$

Uit γ haal je $\alpha+\beta$, en daarmee dus $\tan \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$.
Dan zijn α en β zo gevonden.

De tangens?

Gr. 34

34 min	Sinus	Logarithmi	Differentiæ	logarithmi	Sinus	
30	5664062	5684436	3750122	1934314	8241262	30
31	5666459	5680205	3743891	1936314	8239614	29
32	5668856	5675976	3737661	1938315	8237965	28
57	5728613	5571114	3582364	1988750	8196522	3
58	5730997	5566953	3576169	1990784	8194855	2
59	5733381	5562795	3569976	1992819	8193188	1
60	5735764	5558639	3563784	1994855	8191520	0
						min.
						gra
				55		55.

Dit is de tweede pagina voor 34°, met minuten van 30′ tot en met 60′.

Het is ook een pagina voor 55°, met minuten van 0′ tot en met 30′.

De tangens?

De regel

32	5668856	5675976	3737661	1938315	8237965	28

geeft ons achtereenvolgens

- de minuut: $32'$
- de sinus van $34°32'$
- de logaritme van de sinus van $34°32'$
- het verschil van de logaritmen van $\mathrm{Sin}\,34°32'$ en $\mathrm{Sin}\,55°28'$
- de logaritme van de sinus van $55°28'$
- de sinus van $55°28'$
- de minuut: $28'$

Maar $\mathrm{Sin}\,55°28' = \mathrm{Cos}\,34°32'$

Dus in het midden staat $\mathrm{Nlog}\,\tan 34°32'$