AM2520-H: Oude Analyse

week 1.10, dinsdag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 3 november 2020

Outline

Nog even over de Logaritmen

Oude Analyse
- Oppervlakte en Inhoud
- Extremen

Nieuwe ideeën

Het kostte Napier 20 jaar de tabel te maken
(er zitten naar men zegt vrij weinig fouten in).

Napier besloot tot een nieuwe opzet: zorg dat $\log 1 = 0$ en $\log 10 = 1$.

Dan hebben we alleen $\log a$ nodig voor $1 \leqslant a < 10$.

Napier overleed voor hij dat kon doen; Briggs nam het stokje over.
Hij had er veel met Napier over gesproken.

Werkwijze

Briggs trok met de hand vierkantswortels:

$$\sqrt{10}, \quad \sqrt{\sqrt{10}}, \quad \sqrt{\sqrt{\sqrt{10}}}, \ldots, 10^{\frac{1}{2^{54}}}$$

54 keer; in 30 decimalen!

Volgens bc staat op de 54de plaats 1.000000000000000127819149320031.

Dus $\log 1.000000000000000127819149320031 = 2^{-54}$
En dat is dus 0.000000000000000055511151231257827021181583404541015625.

Verdere waarden in de tabel door interpolatie, bijvoorbeeld: als $\log a$ en $\log b$ bekend zijn dan $\log \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$.
Zo kom je al snel een heel eind.

Het principe van Cavalieri

De Stelling

Als tussen twee parallelle lijnen twee vlakke figuren worden geconstrueerd, en als daarin voor elke rechte lijn parallel aan de gegeven lijnen de delen in beide figuren even groot zijn dan zijn de figuren even groot.
En als tussen twee parallelle vlakken twee lichamen worden geconstrueerd en als daarin voor elk vlak parallel aan de gegeven vlakken de vlakke delen in beide figuren even groot zijn dan zijn de figuren even groot.
Laten we figuren zo vergeleken analoga noemen, de ruimtelijke zo wel als de vlakke . . .

(Plaatje op het bord)

Een moderne versie

Als voor alle x in een interval $[a, b]$ geldt dat $f_1(x) - f_2(x) = g_1(x) - g_2(x)$ dan zijn de oppervlakten van de vlakdelen ingesloten door de lijnen $x = a$ en $x = b$ en, respectievelijk, de grafieken van f_1 en f_2 en de grafieken van g_1 en g_2, even groot.

Idem voor lichamen begrensd door grafieken van functies en vlakken.

Toepassing

Column van Ionica Smeets (2018-07-06)

Door een bol wordt een gat geboord, wat resulteert in een servetring van zes centimeter dik.
Wat is de inhoud van die ring?

Integreren volgens Cavalieri

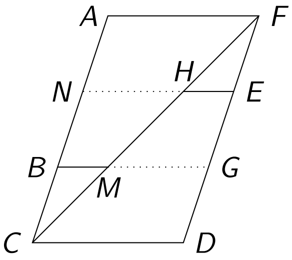
Cavalieri bewees dat, in moderne notatie

$$\int_0^a x^n \,\mathrm{d}x = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

voor $n = 1, 2, 3, \ldots$

Hoe?

Integreren volgens Cavalieri

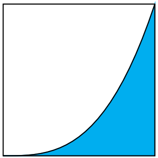


Propositie 21: Alle derde machten van het parallellogram AD zijn het viervoud van alle derde machten van elk van de driehoeken ACF of FDC.

Wat betekent dat?

Integreren volgens Cavalieri

De variabele x is telkens het linker stuk en y het rechter stuk van de horizontale lijn.
Dus $x + y$ is constant, zeg $x + y = a$.
De stelling zegt nu dat $\Sigma a^3 = 4\Sigma x^3 = 4\Sigma y^3$.

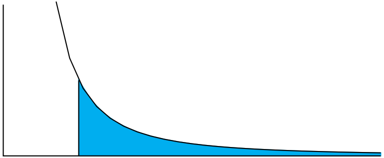


Gevolg: het gebied onder de grafiek van $y = x^3$ is een kwart van het vierkant.
In het algemeen: de verhouding tussen het vierkant en het gebied de grafiek van $y = x^n$ is $(n+1) : 1$.

Fermat: oppervlakte

Oppervlakte onder hyperbolen gegeven door vergelijkingen van de vorm $x^m y^n = a$, *behalve die van Apollonius*: $xy = a$ dus.

Voorbeeld: $yx^2 = a^2$, voor $b \leqslant x < \infty$.



Neem $r > 1$ en bekijk de meetkundige rij $\langle br^n : n \in \mathbb{N} \rangle$.

Fermat: oppervlakte

Maak onder- en bovenschattingen (Riemann-sommen):

Bovenschatting: $a^2(br^n)^{-2}(br^{n+1} - br^n) = a^2 \frac{r-1}{b} \cdot r^{-n}$

Bovenschatting: $a^2(br^{n+1})^{-2}(br^{n+1} - br^n) = a^2 \frac{r-1}{br^2} \cdot r^{-n}$

Bovensom en ondersom zijn dan:

$$a^2 \frac{r-1}{b} \cdot \frac{r}{r-1} = a^2 \cdot \frac{r}{b} \qquad \text{en} \qquad a^2 \frac{r-1}{br^2} \cdot \frac{r}{r-1} = a^2 \cdot \frac{1}{br}$$

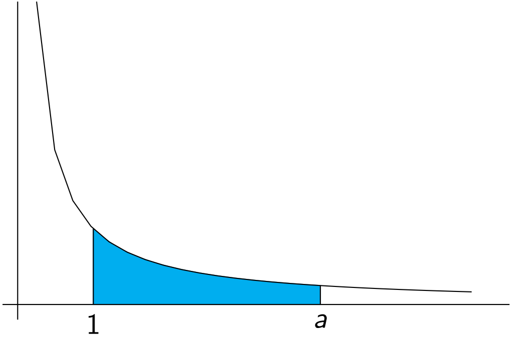
Conclusie: oppervlakte is $a^2 \cdot b^{-1}$.

Fermat: oppervlakte

Dit werkt ook voor $y = x^p$ met $p > 0$ en $0 \leqslant x \leqslant a$.

Werk dit zelf uit: neem $r < 1$ (positief) en verdeel $[0, a]$ in oneindig veel stukken met behulp van de punten a, ar, ar^2, ...

De hyperbool



De grafiek van $y = 1/x$.

De oppervlakte onder de grafiek van $xy = 1$ tussen $x = 1$ en $x = a$ noteren we $A(a)$.

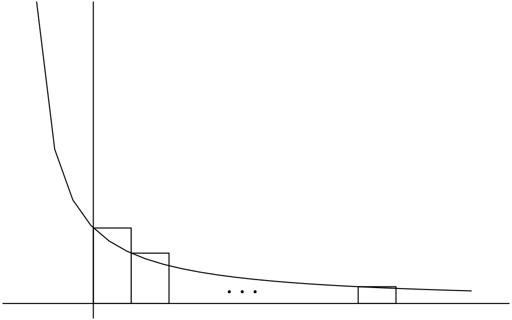
Er geldt $A(ab) = A(a) + A(b)$.

De oppervlakte is een logaritme!

De hyperbool

Nicolaus Mercator (1620–1687) ging aan het werk (1668). Eerst opschuiven:

De grafiek van $y = 1/(1+x)$.



Verdeel $[0, x]$ in n gelijke stukken: $[0, \frac{x}{n}]$, ..., $[\frac{n-1}{n}x, x]$.

De hyperbool

Benader $A(1+x)$ met

$$\frac{x}{n}+\frac{x}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{x}{n}}+\frac{x}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{2x}{n}}+\cdots+\frac{x}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{(n-1)x}{n}}$$

En gebruik meetkundige reeksen:

$$\frac{x}{n}+\frac{x}{n}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{x}{n}\right)^k+\frac{x}{n}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{2x}{n}\right)^k+\cdots+\frac{x}{n}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{(n-1)x}{n}\right)^k$$

Herschikken:

$$n\cdot\frac{x}{n}-\frac{x^2}{n^2}\sum_{l=1}^{n-1}l+\frac{x^3}{n^3}\sum_{l=1}^{n-1}l^2+\cdots+(-1)^k\frac{x^{k+1}}{n^{k+1}}\sum_{l=1}^{n-1}l^k+\cdots$$

De hyperbool

En een beetje opknappen:

$$x - x^2 \left(\frac{1}{n^2} \sum_{l=1}^{n-1} l \right) + x^3 \left(\frac{1}{n^3} \sum_{l=1}^{n-1} l^2 \right) + \cdots + (-1)^k x^{k+1} \left(\frac{1}{n^{k+1}} \sum_{l=1}^{n-1} l^k \right) + \cdots$$

en, wist Mercator, als n oneindig is dan staat hier

$$A(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Daarmee zijn logaritmen weer een stul makkelijker te berekenen.

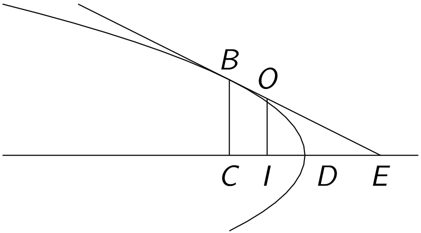
Fermat: extremen

Gegeven een lijnstuk van lengte b verdeel het in twee stukken zó dat hun product maximaal is.

Dus: bepaal $a \in [0, b]$ zó dat $a(b - a)$ maximaal is.

Op het bord(?)

Fermat: raaklijnen



Bepaal de raaklijn aan de parabool in B.
Met andere woorden bepaal de verhouding $CD : CE$.
Kies O op de raaklijn, dicht bij B.

Omdat O buiten de parabool ligt geldt $DC : DI > BC^2 : OI^2$.
Maar $BC : OI = CE : IE$ (gelijkvormigheid) en dus $DC : DI > CE^2 : IE^2$.

Schrijf $d = CD$ en $a = CE$ en $e = CI$ en werk uit:

$$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{(a-e)^2} = \frac{a^2}{a^2 + e^2 - 2ae}$$

Fermat: raaklijnen

Kruislings vermenigvuldigen:

$$da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2e$$

Neem nu O héél dicht bij B.
Dan geldt $de^2 - 2dae \sim -a^2e$ ofwel $de^2 + a^2e \sim 2dae$.

Deel e weg: $de + a^2 \sim 2da$.

Laat de weg, we vinden $a^2 = 2da$, ofwel $a = 2d$.

Fermat: raaklijnen

Hier was men niet snel over uitgepraat.

Waarom niet?

Torricelli

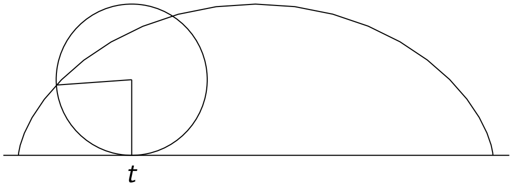
De toeter van Torricelli

Het wentellichaam van $y = \frac{1}{x}$ (voor $x \geqslant 1$) heeft

- eindige inhoud
- oneindige oppervlakte

Dit was zelfs een vraag voor de Nationale Wetenschapsagenda ...

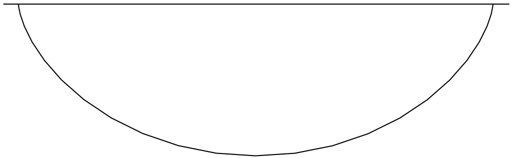
Roberval: De cycloïde



De baan van een punt op een cirkel als deze over de x-as rolt.
$x(t) = t - \sin t$ en $y(t) = 1 \cos t$.

De oppervlakte onder de cycloïde is drie maal de oppervlakte van de rollende cirkel.

Huygens: de Tautochroon



De cycloïde (ondersteboven) is de tautochrone kromme.

De glijtijd vanuit een punt op de cycloïde naar het laagste punt is onafhankelijk van de startpositie.

Dit liet Huygens een betrouwbaar slingeruurwerk ontwerpen.