AM2520-H: Torricelli en Wallis

week 2.1, dinsdag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 9 november 2020

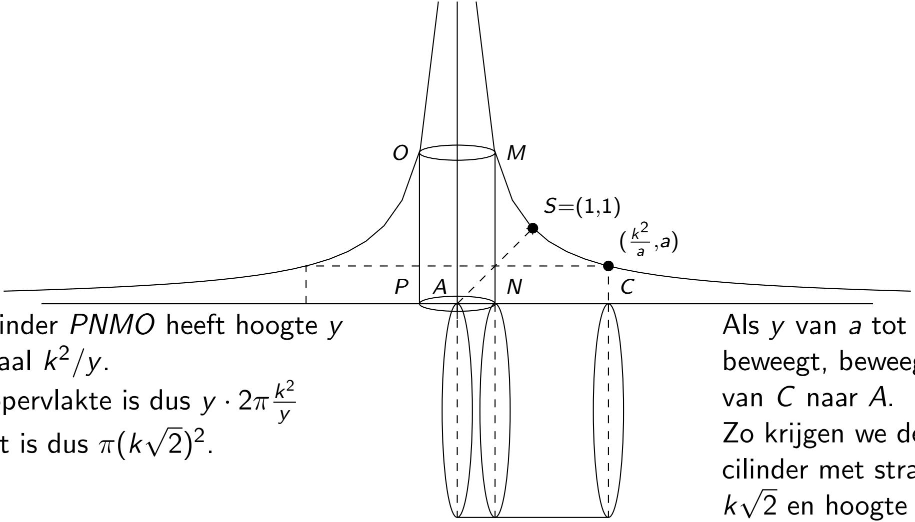
Outline

De Hoorn van Gabriël

Neem de hyperbool met vergelijking $xy = k^2$ en roteer die om de y-as.

Het volume van het ingesloten deel boven het vlak $y = a$ plus het volume van een cilinder met hoogte a en straal k^2/a is gelijk aan het volume van een cilinder met hoogte k^2/a en straal $k\sqrt{2}$ (de afstand van de oorsprong tot de hyperbool).

De Hoorn van Gabriël



De cilinder $PNMO$ heeft hoogte y en straal k^2/y.
De oppervlakte is dus $y \cdot 2\pi\frac{k^2}{y}$
En dat is dus $\pi(k\sqrt{2})^2$.

Als y van a tot ∞ beweegt, beweegt N van C naar A.
Zo krijgen we de cilinder met straal $k\sqrt{2}$ en hoogte k^2/a.

Machten

In *Arithmetica Infinitorum* deed Wallis heel wat Analyse.
Hij bepaalde de oppervlakte onder $y = x^2$, met $0 \leqslant x \leqslant x_0$, als Cavalieri met een verdeling in lijnen, maar met een andere berekening.

Tekening met de hand:
Voor elk verticale lijn geldt: de verhouding 'onder':'geheel' is $x^2 : x_0^2$.

De verhouding van de oppervlakten is dus

$$\sum x^2 : \sum x_0^2$$

Machten

Het belangrijke punt in die verhouding is

$$\frac{0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^2 + n^2 + n^2 + \cdots + n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$$

Dus als n 'oneindig' is is de verhouding dus $\frac{1}{3}$.

In het algemeen

$$\frac{0^k + 1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + n^k + \cdots + n^k} = \frac{1}{k+1}$$

als er oneindig veel termen staan.
Bewijs door 'inductie': 1, 2, 3, 4, ..., alle k

Machten

Het verband is lineair, daarom geldt het ook bij $k = 0$.

En dus ook voor gebroken exponenten:

$$\frac{\sqrt{0} + \sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n} + \sqrt{n} + \cdots + \sqrt{n}} = \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{2}{3}$$

En dus in moderne taal

$$\int_0^1 x^{\frac{p}{q}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\frac{p}{q} + 1} = \frac{q}{p+q}$$

Machten

Ook voor negatieve machten??

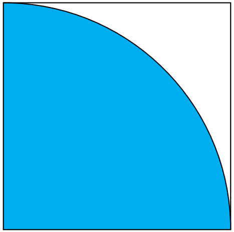
$k = -1$ geeft $\frac{1}{0}$.

$k = -2$ geeft $\frac{1}{-1}$.

Hier gaf Wallis het op.

De kwart cirkel

De volgende stap was de kwart cirkel.



De verhouding tussen het vierkant en het blauwe stuk noteerde hij $\square$.
Dus $\square = \frac{4}{\pi}$.

De kwart cirkel

Hij pakte het probleem algemener aan:
bekijk alle krommen

$$y = (1 - x^{\frac{1}{p}})^n$$

en $\square$ treedt dus op bij $p = \frac{1}{2}$, en $n = \frac{1}{2}$.

Voor gehele p en n is de oplossing er al wegens

$$(1 - x^{\frac{1}{p}})^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^{\frac{k}{p}}$$

De kwart cirkel

Het eerste resultaat is dat voor elk paar (p, n) het vierkant een geheel veelvoud, $a_{p,n}$, van het gebied onder de kromme is.

En dat gehele getal $a_{p,n}$ is $\binom{n+p}{p} = \binom{n+p}{n}$.

Reken dat maar eens na.

De kwart cirkel

De volgende stap: interpoleren voor $p = \frac{1}{2}$, $p = \frac{3}{2}$, $\ldots$ en $n = \frac{1}{2}$, $n = \frac{3}{2}$, $\ldots$.

Voor gehele p en n hebben we $a_{p,0} = a_{0,n} = 1$, en

$$a_{p,n} = \frac{p+n}{n} a_{p,n-1}$$

Dit moet dan ook voor andere p en n gelden.

Begin met $a_{\frac{1}{2},0} = 1$ en $a_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \square$
En, $\ldots$, aan het werk

De kwart cirkel

Gehele n:

$$a_{\frac{1}{2},1} = \frac{\frac{1}{2}+1}{1} a_{\frac{1}{2},0} = \frac{3}{2}, \quad a_{\frac{1}{2},2} = \frac{\frac{1}{2}+2}{2} a_{\frac{1}{2},1} = \frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}, \quad a_{\frac{1}{2},3} = \frac{\frac{1}{2}+3}{3} a_{\frac{1}{2},2} = \frac{7}{6}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{2}, \ldots$$

Halfjes:

$$a_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} a_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}\square, \quad a_{\frac{1}{2},\frac{5}{2}} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} a_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}} = \frac{6}{5}\cdot\frac{4}{3}\square, \quad a_{\frac{1}{2},\frac{7}{2}} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{7}{2}}{\frac{7}{2}} a_{\frac{1}{2},\frac{5}{2}} = \frac{8}{7}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{4}{3}\square, \ldots$$

De kwart cirkel

En hier is de tabel van Wallis, ook voor andere halfjes

Verbi gratiâ; ſi numerus hâc notâ □ deſignatus ſupponatur cognitus, reliqui omnes etiam cognoſcentur; qui nempe eam habent ad illum rationem quæ hic ſubtus indigitatur.

∞	1	$\frac{1}{2}\square$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}\square$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{15}\square$	$\frac{15}{48}$	$\frac{8}{35}\square$	$\frac{105}{384}$	A
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\frac{1}{2}\square$	1	$\square$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}\square$	$\frac{15}{8}$	$\frac{8}{5}\square$	$\frac{105}{48}$	$\frac{64}{35}\square$	$\frac{945}{384}$	$A \times \frac{2l-1}{1}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5	$l = \frac{2l \mp 0}{2}$
$\frac{1}{3}\square$	1	$\frac{4}{3}\square$	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}\square$	$\frac{35}{8}$	$\frac{64}{15}\square$	$\frac{315}{48}$	$\frac{128}{21}\square$	$\frac{3465}{384}$	$A \times \frac{4l^2-1}{3}$
$\frac{3}{8}$	1	$\frac{15}{8}$	3	$\frac{35}{8}$	6	$\frac{63}{8}$	10	$\frac{99}{8}$	15	$\frac{l^2+l}{2} = \frac{4l^2+4l}{8}$
$\frac{4}{15}\square$	1	$\frac{8}{5}\square$	$\frac{7}{2}$	$\frac{64}{15}\square$	$\frac{63}{8}$	$\frac{128}{15}\square$	$\frac{693}{48}$	$\frac{512}{35}\square$	$\frac{9009}{384}$	$A \times \frac{8l^3+12l^2-2l-3}{15}$
$\frac{15}{48}$	1	$\frac{105}{48}$	4	$\frac{315}{48}$	10	$\frac{693}{48}$	20	$\frac{1287}{48}$	35	$\frac{l^3+3l^2+2l}{6} = \frac{8l^3+24l^2+16l}{48}$
$\frac{8}{35}\square$	1	$\frac{64}{35}\square$	$\frac{9}{2}$	$\frac{128}{21}\square$	$\frac{99}{8}$	$\frac{512}{35}\square$	$\frac{1287}{48}$	$\frac{1024}{35}\square$	$\frac{19305}{384}$	$A \times \frac{16l^4+64l^3+56l^2-16l-15}{105}$
$\frac{105}{384}$	1	$\frac{945}{384}$	5	$\frac{3465}{384}$	15	$\frac{9009}{384}$	35	$\frac{19305}{384}$	70	$\frac{6l^4+6l^3+11l^2+6l}{24} = \frac{16l^4+96l^3+176l^2+96l}{384}$
										Totus

A a a

De kwart cirkel

De belangrijke rij

$$1 \qquad \Box \qquad \frac{3}{2} \qquad \frac{4}{3}\Box \qquad \frac{5}{4}\frac{3}{2} \qquad \frac{6}{5}\frac{4}{3}\Box \qquad \frac{7}{6}\frac{5}{4}\frac{3}{2} \qquad \frac{8}{7}\frac{6}{5}\frac{4}{3}\Box \qquad \ldots$$

De verhoudingen $a_{\frac{1}{2},n+2} : a_{\frac{1}{2},n}$ dalen: $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{6}$, ...

Dus (!): de opeenvolgende verhoudingen dalen ook.

$$\Box : 1 > \frac{3}{2} : \Box > \frac{4}{3}\Box : \frac{3}{2} > \frac{5}{4}\frac{3}{2} : \frac{4}{3}\Box > \frac{6}{5}\frac{4}{3}\Box : \frac{5}{4}\frac{3}{2} > \frac{7}{6}\frac{5}{4}\frac{3}{2} : \frac{6}{5}\frac{4}{3}\Box > \frac{8}{7}\frac{6}{5}\frac{4}{3}\Box : \frac{7}{6}\frac{5}{4}\frac{3}{2} > \cdots$$

De kwart cirkel

Hieruit halen we

- $\square^2 > \frac{3}{2}$ of $\square > \sqrt{\frac{3}{2}}$,
- $\square^2 > \frac{5}{4}\left(\frac{3}{2}\frac{3}{4}\right)^2$, of $\square > \frac{3}{2}\frac{3}{4}\sqrt{\frac{5}{4}}$,
- $\square^2 > \frac{7}{6}\left(\frac{5}{6}\frac{5}{4}\frac{3}{4}\frac{3}{2}\right)^2$, of $\square > \frac{5}{6}\frac{5}{4}\frac{3}{4}\frac{3}{2}\sqrt{\frac{7}{6}}$

en

- $\left(\frac{3}{2}\right)^2 > \frac{4}{3}\square^2$, of $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{4}} > \square$,
- $\left(\frac{5}{4}\frac{3}{2}\right)^2 > \frac{6}{5}\left(\frac{4}{3}\square\right)^2$, of $\frac{5}{4}\frac{3}{4}\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{6}} > \square$,
- $\left(\frac{7}{6}\frac{5}{4}\frac{3}{2}\right)^2 > \frac{8}{7}\left(\frac{6}{5}\frac{4}{3}\right)^2\square$, of $\frac{7}{6}\frac{5}{6}\frac{3}{4}\frac{3}{2}\sqrt{\frac{7}{8}} > \square$

De kwart cirkel

Hier is het werk van Wallis:

Hoc est, $\square \begin{cases} \text{minor quam } \frac{3\times 3}{2\times 4}\times\sqrt{1\tfrac{1}{3}}. \\ \text{major quam } \frac{3\times 3}{2\times 4}\times\sqrt{1\tfrac{1}{4}}. \end{cases}$

Et (pari ratione) erit $\delta = c \times \frac{\delta}{c} = \frac{4\times 6}{3\times 5}\square \begin{cases} \text{minor quã } \frac{3\times 5}{2\times 4}\times\sqrt{1\tfrac{1}{5}}. \\ \text{major quã } \frac{3\times 5}{2\times 4}\times\sqrt{1\tfrac{1}{6}}. \end{cases}$

Hoc est, $\square \begin{cases} \text{minor quam } \frac{3\times 3\times 5\times 5}{2\times 4\times 4\times 6}\sqrt{1\tfrac{1}{5}}. \\ \text{major quam } \frac{3\times 3\times 5\times 5}{2\times 4\times 4\times 6}\sqrt{1\tfrac{1}{6}}. \end{cases}$

Et (continuatâ ejusmodi operatione juxta Tabellæ leges) invenietur

$$\square \begin{cases} \text{minor quam } \frac{3\times 3\times 5\times 5\times 7\times 7\times 9\times 9\times 11\times 11\times 13\times 13}{2\times 4\times 4\times 6\times 6\times 8\times 8\times 10\times 10\times 12\times 12\times 14}\times\sqrt{1\tfrac{1}{13}}. \\ \text{major quam } \frac{3\times 3\times 5\times 5\times 7\times 7\times 9\times 9\times 11\times 11\times 13\times 13}{2\times 4\times 4\times 6\times 6\times 8\times 8\times 10\times 10\times 12\times 12\times 14}\times\sqrt{1\tfrac{1}{14}}. \end{cases}$$

De kwart cirkel

Dus

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times \cdots}{2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times 8 \times \cdots}$$

Een modern bewijs gaat via de integralen

$$\int_0^\pi \sin^n x \,\mathrm{d}x$$

(probeer het maar eens).