AM2520-H: Newton en Leibniz

week 2.2, Maandag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 16 november, 2020

Outline

De pest

Zoals bekend ging Newton naar huis tijdens de Pestjaren 1664–1666 en ontwikkelde hij daar zo ongeveer alles waar we tegenwoordig zijn naam aan verbinden.

Een recent stuk van Viktor Blåsjö in *Nieuw Archief voor Wiskunde* zet enige kanttekeningen bij dit verhaal (link op BrightSpace).

Newton kende het werk van Wallis goed.

Machtreeksen

Newton vond machtreeksen ('oneindig lange polynomen') net zo natuurlijk als decimale ontwikkelingen.
Hij trok de analogie van polynomen en decimale getallen gewoon door.

Bijvoorbeeld:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots$$

door middel van een staartdeling.

Machtreeksen

Of

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} - \frac{5x^8}{128} + \frac{7x^{10}}{256} - \cdots$$

door middel van 'worteltrekken met de hand'.

Machtreeksen

Of vergelijkingen oplossen. Zeg $y^3 - 2y - 5 = 0$.

Dan is 2 bijna een oplossing; neem dus $y = 2 + p$ en vul in: $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$.
Negeer hogere machten en los $10p - 1 = 0$ op.
De tweede benadering is 2.1, en we gaat verder met $p = 0.1 + q$ ...

Invullen: $q^3 + 6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0$
en los $11{,}23q + 0{,}061 = 0$ op

Machtreeksen

Dit werkt ook met iets als $y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$.
Stug doorwerken geeft

$$y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} + \frac{131x^3}{512a^2} + \frac{509x^4}{16384a^3} + \cdots$$

De binomiaalformule

Newton probeerde de oppervlakte van een kwart cirkel te bepalen, dus onder de grafiek van $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$.

Hij begon met $(1-x^2)^n$ voor natuurlijke getallen n en primitiveerde in feite.

De binomiaalformule

In onze taal:

$$\int_0^x (1-x^2)^0\,\mathrm{d}x = x$$

$$\int_0^x (1-x^2)^1\,\mathrm{d}x = x - \frac{1}{3}x^3$$

$$\int_0^x (1-x^2)^2\,\mathrm{d}x = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5$$

$$\int_0^x (1-x^2)^3\,\mathrm{d}x = x - \frac{3}{3}x^3 + \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7$$

$$\int_0^x (1-x^2)^4\,\mathrm{d}x = x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{6}{5}x^5 - \frac{4}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9$$

De binomiaalformule

De coëfficiënten van x, $-\frac{1}{3}x^3$, $\frac{1}{5}x^5$, $-\frac{1}{7}x^7$, $\frac{1}{9}x^9$ ... volgen de driehoek van Pascal.

Dus zal dat voor $n = \frac{1}{2}$ ook wel zo zijn: $\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}$.
De coëfficiënten worden dan

$$\binom{\frac{1}{2}}{0} = 1, \quad \binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \quad \binom{\frac{1}{2}}{2} = -\frac{1}{8}, \quad \binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{3}{48}, \quad \binom{\frac{1}{2}}{4} = -\frac{15}{384},$$

Algemeen

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-k+1)}{k\cdot(k-1)\cdots 1}$$

Een tabel

Met behulp van de somregel

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

krijgen we

$n=-1$	$n=-\frac{1}{2}$	$n=0$	$n=\frac{1}{2}$	$n=1$	$n=\frac{3}{2}$	$n=2$	$n=\frac{5}{2}$	$\cdots$	factor
1	1	1	1	1	1	1	1	$\cdots$	x
-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	$\cdots$	$-\frac{x^3}{3}$
1	$\frac{3}{8}$	0	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{8}$	1	$\frac{15}{8}$	$\cdots$	$\frac{x^5}{5}$
-1	$-\frac{5}{16}$	0	$\frac{3}{48}$	0	$-\frac{1}{16}$	0	$\frac{5}{16}$	$\cdots$	$-\frac{x^7}{7}$
1	$\frac{35}{128}$	0	$-\frac{15}{384}$	0	$\frac{3}{128}$	0	$-\frac{5}{128}$	$\cdots$	$\frac{x^9}{9}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$

De binomiaalformule

Dit werkt voor alle exponenten en de noemers 1, 3, 5, 7, … kwamen alleen wegens de oppervlakteberekening tevoorschijn.
En dus

$$(a+bx) = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}bx + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2x^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3x^3 + \cdots$$

de *algemene binomiaalformule*.

De binomiaalformule

Newton vond dat dit klopte want het gaf in veel gevallen het antwoord dat hij op andere manieren had gevonden: voor $n = -1$ krijg je ook

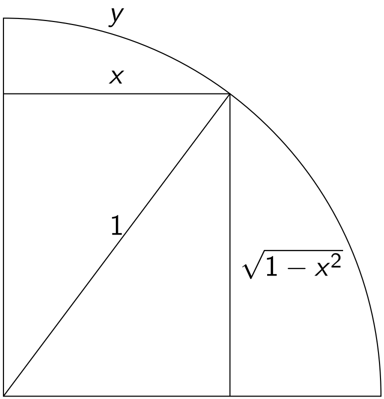
$$(1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots$$

En dus(!)

$$\log(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + \cdots$$

Dezelfde formula als die van Mercator.

Terug naar de cirkel



De oppervlakte van de sector: $\frac{1}{2}y = \frac{1}{2}\arcsin x$
De oppervlakte van driehoek: $\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$
Dus

$$\begin{aligned} y &= \arcsin x \\ &= 2\int_0^x (1-x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x - x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \cdots \end{aligned}$$

via de reeks voor $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$.

Terug naar de cirkel

En nu oplossen naar x geeft, natuurlijk, $x = \sin y$.

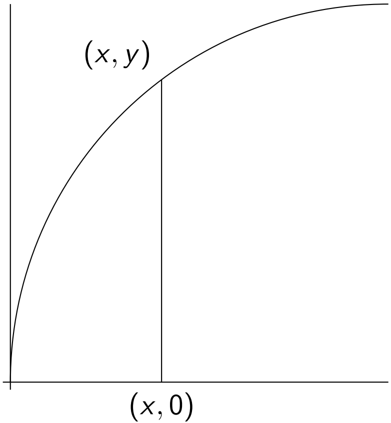
Op de eerdere manier van stuksgewijs de vergelijking

$$y = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \cdots$$

oplossen volgt

$$x = y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{120}y^5 - \frac{1}{5040}y^7 + \cdots$$

De hoofdstelling van de Integraalrekening



De beweging van het punt (x, y) bepaalt de kromme
De beweging van de verticale lijn bepaalt de oppervlakte z
Dus is zonder meer(!) duidelijk dat

$$\dot{z} = y \cdot \dot{x}$$

ofwel

$$\frac{\dot{z}}{\dot{x}} = y$$

Nog veel meer

1. Primitiveren gebeurde voornamelijk door termsgewijs integreren van machtreeksen.
2. Impliciet differentiëren, bijvoorbeeld als $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ dan $\dot{x} : \dot{y} = (3y^2 - ax) : (3x^2 - 2ax + ay)$
3. Wetten van Kepler; "ik heb het al uitgerekend" zei Newton tegen Halley, die daar vragen over had.

Sommen en verschillen

Een handige opmerking.
Als A, B, C, D, E een stijgende rij getallen is en L, M, N, P de rij verschillen ($L = B - A$, etc) dan geldt

$$L + M + N + P = E - A$$

Dit is handiger dan je zou denken

Sommen en verschillen

De Aritmetische driehoek (van Pascal).

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

Elke kolom is de verschilrij van de kolom rechts ernaast

Dus $1 + 2 + 3 + 4 = 10$

(tweede en derde kolom)

en $3 + 6 + 10 + 15 = 35 - 1 = 34$

(derde en vierde kolom)

Sommen en verschillen

De Harmonische driehoek (van Leibniz).

$$
\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{1} \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{20} & \frac{1}{30} & \frac{1}{20} & \frac{1}{5} \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{60} & \frac{1}{60} & \frac{1}{30} & \frac{1}{6} \\
\frac{1}{7} & \frac{1}{42} & \frac{1}{105} & \frac{1}{140} & \frac{1}{105} & \frac{1}{42} & \frac{1}{7} \\
\frac{1}{8} & \frac{1}{56} & \frac{1}{168} & \frac{1}{280} & \frac{1}{280} & \frac{1}{168} & \frac{1}{56} & \frac{1}{8} \\
\frac{1}{9} & \frac{1}{72} & \frac{1}{252} & \frac{1}{504} & \frac{1}{630} & \frac{1}{504} & \frac{1}{252} & \frac{1}{72} & \frac{1}{9}
\end{array}
$$

Elke kolom is de verschilrij van de kolom links ernaast

Dus $\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} = \frac{1}{2} - \frac{1}{20}$

(tweede en derde kolom)

Maar dit geldt ook voor oneindig lange sommen (wat je aftrekt gaat naar nul), dus:

$\frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \cdots = \frac{1}{2}$.

Sommen en verschillen

Leibniz vertaalde dit naar de meetkunde van krommen.
Stel $y = f(x)$ op een interval $[a, b]$. Neem een partitie $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ van $[a, b]$, met bijbehorende ordinaten y_0, y_1, ..., y_n.
De verschilrij $\langle \delta y_i \rangle$ heeft als som $y_n - y_0$.
De verschilrij van de rij $\langle \sum y_i \rangle$ (met $\sum y_i = y_0 + \cdots y_i$) is de rij $\langle y_i \rangle$ zelf:

$$\left\langle \delta \sum y_i \right\rangle = \langle y_i \rangle$$

Sommen en verschillen

De kromme is een veelhoek met oneindig veel zijden met bij elk snijpunt een waarde van x en y.
De verschilrij noteren we met $\mathrm{d}y$ en de somrij als $\int y$.
We krijgen dus als eerder $\int \mathrm{d}y = y$ en $\mathrm{d} \int y = y$.

De eerste is duidelijk: de som van de *differentialen* (verschillen) over een interval is het verschil over het interval.

Het tweede heeft geen duidelijke meetkundige interpretatie; die som van oneindig veel dingen kan best oneindig zijn.

Sommen en verschillen

Leibniz bekeek daarom $y\,\mathrm{d}x$, de infinitesimale oppervlakte onder zo'n oneindig kleine zijde van de veelhoek.

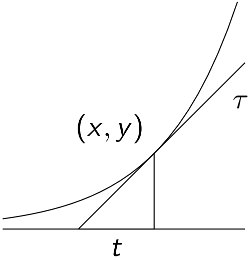
De regel $\mathrm{d}\int y\,\mathrm{d}x = y\,\mathrm{d}x$ zegt in dit geval dat de $y\,\mathrm{d}x$ de verschilrij vormen van de rij oppervlakten onder de veelhoek (de kromme).
(De hoofdstelling van de integraalrekening!)

Leibniz dacht lang na over de notatie, de d staat voor *differentia*
En de $\int$ (een uitgerekte S) staat voor *summa*

Datum is bekend: 29 oktober 1675

Een oud probleem

Leibniz loste een oud probleem op: geef de kromme waarvan de subtangent constant is, met waarde a.



In het plaatje is τ de raaklijn (tangent) en t is de *subtangent*: het verschil tussen x en het snijpunt van τ met de x-as.

De vraag is dus: voor welke kromme is t constant, met waarde a?

Er moet dus gelden dat $y : a = \mathrm{d}y : \mathrm{d}x, \ldots$

Een oud probleem

... en hieruit halen we een differentiaalvergelijking: $a\,\mathrm{d}y = y\,\mathrm{d}x$.

Hou nu $\mathrm{d}x$ constant, de y zijn dus evenredig met hun verschillen $\mathrm{d}y$.
Dat betekent dat de y een 'meetkundige rij' vormen.
De x vormen een rekenkundige rij, dus het verband tussen y en x is logaritmisch.
De kromme is dus een logaritmische kromme

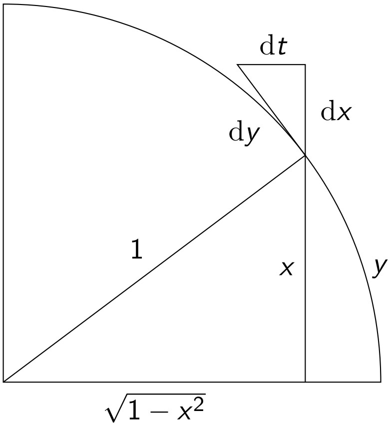
Even 'echt' oplossen:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{a}y$$

geeft

$$y = C\mathrm{e}^{\frac{1}{a}x}$$

Nog een differentiaalvergelijking



We hebben (als bij Newton) $y = \arcsin x$, of $x = \sin y$.
Gelijkvormige driehoeken:

$$\mathrm{d}t = \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Stelling van Pythagoras:

$$\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 = \mathrm{d}y^2$$

Nog een differentiaalvergelijking

Invullen en uitwerken:

$$\mathrm{d}x^2 + x^2\,\mathrm{d}y^2 = \mathrm{d}y^2$$

Hou $\mathrm{d}y$ constant (eenparig langs de cirkel dus) en pas d toe:
$2\,\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}\,\mathrm{d}x + 2x\,\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y^2 = 0$ en dus

$$\mathrm{d}^2x + x\,\mathrm{d}y^2 = 0 \qquad \text{ofwel} \qquad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2} = -x$$

En op de bekende manier (als bij AM2030) vond Leibniz de machtreeks voor de sinus.