AM2520-H: Georg Cantor

week 2.5, Maandag

K. P. Hart

Faculteit EWI
TU Delft

Delft, 7 december 2020

Outline

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918)

Geboren: 3 maart 1845 in Sint-Petersburg (Rusland)
Gestorven: 6 Januari 1918 in Halle (Saksen, Duitsland)
Middelbare school: Darmstadt
Universiteit: Darmstad, Zürich en Berlijn.
1867: Promotie
1869: Habilitation in Halle
1879: Hoogleraar in Halle

Halle

Na zijn promotie, in de Getaltheorie, ging Cantor naar Halle.

Zijn collega Heine had bewezen:

Stelling

Als f te schrijven is als

$$\begin{aligned} f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 &+ a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots \\ &+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots \end{aligned}$$

waarbij de convergentie uniform is dan kan dat maar op één manier.

Probleem

Heine stelde voor dat Cantor aan het uniciteitsprobleem zou werken, *zonder* aanname van unforme convergentie.

Cantor's eerste resultaat lijkt op het Riemann-Lebesguelemma.

Stelling (Stelling van Cantor en Lebesgue)

Stel dat voor alle x in een interval (a, b) geldt dat

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx = 0$$

dan geldt $\lim_n a_n = \lim_n b_n = 0$.

De oplossing

Het probleem is equivalent met:

Als

$$\begin{aligned}0 = \tfrac{1}{2}a_0 &+ a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots \\ &+ b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots\end{aligned}$$

voor alle x, moet dan gelden dat $a_n = 0$ en $b_n = 0$ voor alle n?

En dat kon Cantor uiteindelijk bewijzen.

De oplossing

Hij gebruikte de methode van Riemann: bekijk

$$F(x) = \frac{1}{4}a_0x^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Riemann had bewezen dat

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha \cdot \alpha} = 0$$

in het algemeen is de limiet gelijk aan $f(x)$.

De oplossing

De limiet is gelijk aan $F''(x)$ als F twee keer differentieerbaar .
(Mooie Analyseopgave.)

Maar in dit geval geldt evengoed, zonder differentieerbaarheidsaannamen, dat $F(x)$ van de vorm $cx + d$ moet zijn.

De oplossing

Dus

$$-\frac{1}{4}a_0x^2 - cx - d = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

De rechterkant is periodiek, dus $a_0 = c = 0$.

Nu hebben we

$$0 = d + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

een uniform convergente reeks, dus kunnen we de stelling van Heine toepassen.

Alle a_n en b_n zijn gelijk aan 0.

De uitbreiding

Cantor probeerde de stelling te veralgemenen en dat lukte.

In het nieuwe artikel gebeurden drie dingen.

- De constructie van de reële getallen met behulp van fundamentaalrijen (Cantor's naam voor Cauchyrijen)
- De invoering van de notie van verdichtingspunt en afgeleide verzameling
- Een bewijs van de algemenere stelling.

De uitbreiding

De constructie van $\mathbb{R}$ hebben we gezien.

De definitie van verdichtingspunt en afgeleide verzameling ook.

Een verzameling P heet van de n-de soort, waarbij $n \in \mathbb{N}$, als $P^{(n)}$ uit slechts een eindig aantal punten bestaat.

De uitbreiding luidt dan ...

De uitbreiding

Stelling

Als

$$0 = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x + \cdots$$

voor alle x,
behalve in de punten van een verzameling P van de n-de soort voor een $n \in \mathbb{N}$,
dan geldt $a_n = 0$ en $b_n = 0$ voor alle n.

De uitbreiding

Het bewijs gaat bijna als dat van de eerste stelling.

Van dezelfde functie F wordt aangetoond dat het een eerstegraadsfunctie is.

Dat geldt in elk interval in $\mathbb{R} \setminus P$ met eindpunten in P;
en in aanliggende intervallen zijn die lineaire functies steeds geijk.

Omdat P van de n-de soort is volgt in n stappen dat er één eerstegraadsfunctie is die overal werkt.

Uit een brief van Cantor aan Dedekind

Halle, d. 29ten Nov. 73.

Man nehme den Inbegriff aller positiven ganzzahligen Individuen n und bezeichne ihn mit (n); ferner denke man sich etwa den Inbegriff aller positiven reellen Zahlgrössen x und bezeichne ihn mit (x); so ist die Frage einfach die, ob sich (n) dem (x) so zuordenen lasse, dass zu jedem Individuum des einen Inbegriffes ein und nur eines des andern gehört?

Het antwoord, van Cantor zelf

Halle, d. 7ten December 73.

. . .

So glaube ich schliesslich zum Grunde gekommen zu sein, weshalb sich der in meinen fruheren Briefen mit (x) bezeichnete Inbegriff *nicht* dem mit (n) bezeichneten eindeutig zuordnen lässt.

$\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$, en ... $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Later construeerde Cantor bijecties tussen

$\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$

...

$\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Cantor: "Je le vois, mais je ne le crois pas"

Deelverzamelingen van $\mathbb{R}$

Cantor begon een serie van zes artikelen over de structuur van deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ (en soms de $\mathbb{R}^n$).

Hierin is een heleboel van wat we nu over gesloten deelverzamelingen weten te vinden.

Afgeleide verzamelingen

Cantor ontdekte dat hij zoals eerder herhaald afgeleide verzamelingen kon nemen.

Dus P, P', P'', $\ldots$, $P^{(n)}$, $\ldots$

En ook $P^{(\infty)} = \bigcap_n P^{(n)}$, $P^{(\infty+1)} = (P^{(\infty)})'$, $P^{(\infty+2)} = (P^{(\infty+1)})'$, $\ldots$

En ook $P^{(2\infty)} = \bigcap_n P^{(\infty+n)}$, $P^{(2\infty)} = (P^{(2\infty)})'$, $P^{(2\infty+2)} = (P^{(2\infty+1)})'$, $\ldots$

$\ldots$

En ook $P^{(\infty^2)} = \bigcap_n P^{(n\infty)}$, $P^{(\infty^2+1)} = (P^{(\infty^2)})'$, $P^{(\infty^2+2)} = (P^{(\infty^2+1)})'$, $\ldots$

$\ldots$

En ook $P^{(\infty^\infty)} = \bigcap_n P^{(\infty^n)}$, $P^{(\infty^\infty+1)} = (P^{(\infty^\infty)})'$, $P^{(\infty^\infty+2)} = (P^{(\infty^\infty+1)})'$, $\ldots$

$\ldots$

Afgeleide verzamelingen

Opgave: laat zien dat dit echt allemaal mogelijk is.
Dat wil zeggen, er bestaat voor elke α als hierboven een P_α zó dat $P_\alpha^{(\alpha)} = \{0\}$.

Stelling

Als A gesloten dan is er een symbool α zó dat $A^{(\alpha)} = A^{(\alpha+1)}$.
Als $A^{(\alpha)} = \emptyset$ dan is A aftelbaar.
Anders is $A^{(\alpha)}$ perfect, en is A even groot als $\mathbb{R}$.

Ordinaalgetallen

Die symbolen ontwikkelden zich uiteindelijk tot de ordinaalgetallen.

En die ∞ werd al gauw vervangen door ω (het orde-type/ordinaalgetal van $\mathbb{N}$).

Kardinaalrekenkunde

Cantor liet ook zien hoe je met de oneindige kardinaliteiten kunt rekenen.

- Optellen: disjuncte vereniging nemen
- Vermenigvuldigen: Cartesisch product
- Machtsverheffen: verzamelingen functies

Kardinaalrekenkunde

We hebben de bekende rekenregels:

- $\mathfrak{m}^{\mathfrak{o}} \cdot \mathfrak{n}^{\mathfrak{o}} = (\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n})^{\mathfrak{o}}$
- $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}+\mathfrak{o}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} \cdot \mathfrak{m}^{\mathfrak{o}}$
- $(\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{o}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{o}}$

Bewijs: telkens bijecties maken.

Kardinaalrekenkunde

Hij introduceerde $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$ en $\mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$.

Belangrijke gelijkheid

$$2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

Dat wil dus zeggen: er is een bijectie tussen $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ en $\mathbb{R}$.

Kardinaalrekenkunde

We hebben: $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ (want er is een bijectie tussen $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$).

En ook: $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ (want er is een bijectie tussen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$).

Conclusie: $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$
en: $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$

Dit bewijs weer dat $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ even groot zijn,
maar nu, zoals Cantor schreef, met een paar pennestreken!

Ontvangst

Als je nu over het werk van Cantor leest klinkt het als één groot succesverhaal.

En dat is het in onze ogen ook; door 'willekeurige' verzamelingen te gaan bekijken opende Cantor de weg voor vele nieuwe ontwikkelingen.

De kardinaal- en ordinaalgetallen vormen nog steeds de basis van veel onderzoek in de Verzamelingenleer.

Zijn onderzoek naar de structuur van deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ heeft ook heel veel ander werk geïnspireerd.

Ontvangst

Het werk aan en de oplossing van de Continuumhypothese illustreert treffend een uitspraak van Cantor zelf.

> *In re mathematica ars proponendi quaestionem pluris facienda est quam solvendi.*

In de wiskunde is de kunst van het vragen stellen van groter nut dan het beantwoorden ervan.

Ontvangst

Echter . . .

Niet iedereen was even enthousiast.

Leopold Kronecker moest er niets van hebben.

Die was wat we nu een finitist zouden noemen; een aan hem toegeschreven uitspraak is

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk

Daarbij doelde hij niet op het werk dat we gezien hebben bij de constructies van $\mathbb{R}$.

Ontvangst

‘Mensenwerk’ betekende meer dat alles vanuit de natuurlijke getallen in eindig veel stappen te maken moest zijn.

De sneden van Dedekind en Cantor’s equivalentieklassen waren hem een gruwel.

Ontvangst

Er is een artikel van Schoenflies waarin deze de houding van Kronecker beschrijft.

> *Es übersteigt nicht das erlaubte Mass, wenn ich sage, dass die Kroneckersche Einstellung den Eindruck hervorbringen musste, als sei Cantor in seiner Eigenschaft als Forscher und Lehrer ein Verderber der Jugend.*

"Cantor leidt de jeugd in het verderf"

Ontvangst

Kronecker had veel invloed en heeft Cantor nagenoeg zijn hele leven tegengewerkt.

Uit brieven die bewaard zijn gebleven blijkt dat dit alles Cantor ontzettend dwars heeft gezeten.

Hij leed aan depressies.
In oudere geschiedschrijvingen worden die aan de tegenwerking toegeschreven maar oude archieven lijken te bevestigen dat Cantor hier altijd last van heeft gehad.
De tegenwerking zal niet geholpen hebben.

Ontvangst

Evengoed moet Cantor een heel hartelijk en opgewekt persoon zijn geweest.

Hij was ook medeoprichter van de *Deutsche MathematikerVerein* en was hiervan de eerste voorzitter.

Zoals zo vaak pikten jongere wiskundigen die nieuwe dingen makkelijker op en aan het eind van zijn leven kreeg Cantor de eer die hij ruimschoots verdiende.