ALGEMENE TOPOLOGIE.

HET CENTRALE BEGRIP
TOPOLOGISCHE RUIMTE

DEFINITIE
- EEN TOPOLOGIE OP EEN VERZAMELING X IS EEN FAMILIE $\mathcal{T}$ VAN DEELVERZAMELINGEN VAN X DIE VOLDOET AAN
  - $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
  - ALS $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ DAN $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$
  - ALS $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ DAN $\bigcup \mathcal{T}' \in \mathcal{T}$
- HET PAAR $(X, \mathcal{T})$ HEET DAN EEN TOPOLOGISCHE RUIMTE.
- DE ELEMENTEN VAN $\mathcal{T}$ HETEN DE OPEN VERZAMELINGEN VAN DE RUIMTE $(X, \mathcal{T})$

[DIT LIJKT OP DE DEFINITIE VAN EEN MEETBARE RUIMTE $(X, \mathcal{S})$ MET $\mathcal{S}$ EEN σ-ALGEBRA.]

VOORBEELD: ELKE METRISCHE RUIMTE IS EEN TOPOLOGISCHE RUIMTE

ALS (X,d) EEN METRISCHE RUIMTE IS EN $\mathcal{T} = \{ O \subseteq X : O \text{ is } d\text{-open} \}$

DAN IS $(X, \mathcal{T})$ EEN TOPOLOGISCHE RUIMTE.

(O IS d-OPEN : VOOR ELKE $x \in O$ IS ER EEN $\varepsilon > 0$ MET $B(x, \varepsilon) \subseteq O$)

STANDAARD : $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $[0,1]$, $[0,1]^n$, ...

ALTIJD MET STANDAARDMETRIEK EN STANDAARDTOPOLOGIE

VOORBEELDEN: X EEN VERZAMELING

- $\mathcal{T}_i = \{\emptyset, X\}$ — INDISCRETE TOPOLOGIE
- $\mathcal{T}_d = \mathcal{P}(X)$ — DISCRETE TOPOLOGIE (VAN DISCRETE METRIEK)
- $\mathcal{T}_{CE} = \{\emptyset\} \cup \{O : X \setminus O$ IS EINDIG$\}$
- $\mathcal{T}_{CA} = \{\emptyset\} \cup \{O : X \setminus O$ IS AFTELBAAR$\}$
- $S = \{0, 1\}$ $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{0\}, S\}$

DIT ZIJN EXTREME, MAAR NUTTIGE, VOORBEELDEN.

OPGAVE. IN EEN TOPOLOGISCHE RUIMTE $(X, \mathcal{T})$ GELDT: ALS $n \in \mathbb{N}$ EN $O_1, O_2, \dots, O_n \in \mathcal{T}$ DAN $\bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathcal{T}$

BEWIJS DIT

OPGAVE: MAAK IN DE RUIMTE $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{CE})$ EEN RIJ $\langle O_n \rangle_n$ VAN OPEN VERZAMELINGEN ZO DAT $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ NIET OPEN IS.

GESLOTEN VERZAMELINGEN: ALS $(X, \mathcal{T})$ EEN TOPOLOGISCHE RUIMTE IS DAN IS $F \subseteq X$ GESLOTEN ALS $X \setminus F$ OPEN (DWZ EEN ELEMENT VAN $\mathcal{T}$) IS. MEESTAL SCHRIJVEN WE $\mathcal{F}$ VOOR DE FAMILIE GESLOTEN VERZAMELINGEN

OPGAVE: BEPAAL $\mathcal{F}$ VOOR ALLE VOORBEELDEN

BIJ $\mathcal{T}_i$ GELDT $\mathcal{F} =$

BIJ $\mathcal{T}_d$ GELDT $\mathcal{F} =$

BIJ $\mathcal{T}_{CE}$ GELDT $\mathcal{F} =$

BIJ $\mathcal{T}_{CA}$ GELDT $\mathcal{F} =$

IN S GELDT $\mathcal{F} =$

AFGELEIDE NOTIES

- INWENDIGE: A° OF Int A IS
  $\bigcup\{O : O \in \mathcal{T} \text{ EN } O \subseteq A\}$
- AFSLUITING $\overline{A}$ OF cl A IS
  $\bigcap\{F : F \in \mathcal{T} \text{ EN } A \subseteq F\}$
- AFGELEIDE VERZAMELING: A'
  $x \in A'$ DESDA VOOR ELKE $O \in \mathcal{T}$ MET $x \in O$
  GELDT $O \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.
- RAND: ∂A OF Rd A IS
  $\overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$
- DICHTE VERZAMELING: A IS DICHT IN X
  ALS $\overline{A} = X$.
- OMGEVING U IS EEN OMGEVING VAN x
  ALS ER EEN $O \in \mathcal{T}$ IS MET
  $x \in O \subseteq U$.
- OPEN OMGEVING VAN x: EEN $O \in \mathcal{T}$ MET $x \in O$.

NEEM $X = \mathbb{N}$ EN $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{CE}$
LAAT $A = 2\mathbb{N}$, $B = \{0,1,2,3\}$, $C = \mathbb{N} \setminus B$
BEPAAL $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, A°, B°, C°,
A', B', C', ∂A, ∂B, ∂C
IS A DICHT? IS B DICHT? IS C DICHT?

- EEN RUIMTE IS SEPARABEL ALS ER EEN <u>AFTELBARE</u> DICHTE DEELVERZAMELING IS.

NEEM $X = \mathbb{R}$. WELKE TOPOLOGIEËN OP X ZIJN SEPARABEL?

- $\mathcal{T}_i$
- $\mathcal{T}_d$
- $\mathcal{T}_{CE}$
- $\mathcal{T}_{CA}$
- DE GEWONE TOPOLOGIE

EN GEEF IN ELK GEVAL AAN WAAROM (NIET).