TOPOLOGISCHE RUIMTEN MAKEN.

HET IS NIET ALTIJD MOGELIJK DE FAMILIE OPEN VERZAMELINGEN IN ÉÉN KEER OP TE SCHRIJVEN.

WE BEKIJKEN DRIE MANIEREN OM TOPOLOGIEËN INDIRECT TE BESCHRIJVEN

- BASIS
- LOKALE BASES
- SUBBASIS

BASIS

$(X, \mathcal{T})$ EEN TOPOLOGISCHE RUIMTE.
$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ IS EEN BASIS ALS
VOOR ELKE $O \in \mathcal{T}$ ER EEN DEELFAMILIE $\mathcal{B}'$ VAN $\mathcal{B}$ IS MET $\bigcup \mathcal{B}' = O$.

OF EQUIVALENT:
ALS $O \in \mathcal{T}$ DAN IS ER VOOR ELKE $x \in O$ EEN $B \in \mathcal{B}$ MET $x \in B \subseteq O$.

[OPGAVE: BEWIJS DIT]

VOORBEELD

- ALS (X, d) EEN METRISCHE RUIMTE IS DAN IS $\{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$ EEN BASIS VOOR DE TOPOLOGIE VAN X.
- $\{\{x\} : x \in X\}$ IS EEN BASIS VOOR DE DISCRETE TOPOLOGIE OP X.
- $\{X\}$ IS EEN BASIS VOOR DE INDISCRETE TOPOLOGIE OP X.

- STEL $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ IS EEN BASIS VOOR $\mathcal{T}$ DAN GELDT
  (a) $\bigcup \mathcal{B} = X$
  (b) ALS $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ EN $x \in B_1 \cap B_2$ DAN IS ER EEN $B_3 \in \mathcal{B}$ MET $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

  (a) : X IS OPEN ; (b) : $B_1 \cap B_2$ IS OPEN

- STEL X IS EEN VERZAMELING EN $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ VOLDOET AAN (a) EN (b)
  DAN IS ER ÉÉN TOPOLOGIE $\mathcal{T}$ OP X WAAR $\mathcal{B}$ EEN BASIS VOOR IS
- EEN TOPOLOGIE
  DEFINIEER
  $$\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \{ \bigcup \mathcal{B}' : \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} \}$$
  (DE ENIG MOGELIJKE KANDIDAAT)
  - $\emptyset = \bigcup \emptyset$ EN $X = \bigcup \mathcal{B}$ (a)
  - $B = \bigcup \{B\}$ ALS $B \in \mathcal{B}$ DUS $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$
  - STEL $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$
    VOOR ELKE $O \in \mathcal{T}'$ IS ~~ER EEN~~ $\mathcal{B}_O \subseteq \mathcal{B}$ MET $O = \bigcup \mathcal{B}_O$
    DAN $\bigcup \mathcal{T}' = \bigcup (\bigcup \{ \mathcal{B}_O : O \in \mathcal{T}' \}) \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$
  - $O_1, O_2 \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ ZEG $O_1 = \bigcup \mathcal{B}_1$ EN $O_2 = \bigcup \mathcal{B}_2$
    STEL $x \in O_1 \cap O_2$
    NEEM $B_1 \in \mathcal{B}_1$ EN $B_2 \in \mathcal{B}_2$
    MET $x \in B_1 \subseteq O_1$ EN $x \in B_2 \subseteq O_2$
    NEEM $B_3 \in \mathcal{B}$ MET $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$
    EN DUS $x \in B_3 \subseteq O_1 \cap O_2$.
- STEL $\mathcal{S}$ IS OOK EEN TOPOLOGIE MET $\mathcal{B}$ ALS BASIS
  PER DEFINITIE GELDT $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}_{\mathcal{B}}$
  (ELKE $S \in \mathcal{S}$ IS VAN DE VORM $\bigcup \mathcal{B}'$)
  EN $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{S}$: WANT $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{S}$
  EN ALS $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ DAN $\bigcup \mathcal{B}' \in \mathcal{S}$
  OMDAT $\mathcal{S}$ EEN TOPOLOGIE IS.

Voorbeeld

- $X = \mathbb{R}$ en $\mathcal{B} = \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}$
  $\mathcal{B}$ voldoet aan eisen (a) en (b)
  en bepaalt dus een topologie op $\mathbb{R}$
  Bekend standaardvoorbeeld
  De Sorgenfrey-topologie op $\mathbb{R}$
  De ruimte heet de Sorgenfrey-lijn $\mathbb{S}$
- X een willekeurige verzameling
  met een lineaire orde $<$.
  Intervallen $(a,b) = \{x : a < x < b\}$
  $(a,\rightarrow) = \{x : a < x\}$
  $(\leftarrow, b) = \{x : x < b\}$
  $(\leftarrow,\rightarrow) = X$
  $\mathcal{I}$ de familie intervallen is een basis voor een topologie: de orde-topologie.

Lokale Basis

$(X, \mathcal{T})$ een topologische ~~ruimte~~ en $x \in X$
een <u>lokale basis in x</u> is een familie open verzamelingen $\mathcal{B}_x$
met: als $O \in \mathcal{T}$ en $x \in O$ dan is er een $B \in \mathcal{B}_x$ met $x \in B \subseteq O$.
NB: zbda $x \in B$ voor alle $B \in \mathcal{B}_x$.

Voorbeelden

- metrische ruimte
  $\{B(x,r) : r > 0\}$, $\{B(x,q) : q > 0, q \in \mathbb{Q}\}$
  $\{B(x,2^{-n}) : n \in \mathbb{N}\}$, ----
- $\mathbb{S}$ Sorgenfrey-lijn; $x \in \mathbb{S}$
  $\{[x, x+2^{-n}) : n \in \mathbb{N}\}$
  is een lokale basis in x.

$(X, \mathcal{T})$ EEN TOPOLOGISCHE RUIMTE

VOOR ELKE $x \in X$ EEN LOKALE BASIS $\mathcal{B}_x$

DAN (1) ELKE $\mathcal{B}_x$ IS NIET LEEG

(2) ALS $B \in \mathcal{B}_x$ DAN $x \in B$

(3) ALS $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$ DAN IS ER EEN $B \in \mathcal{B}_x$ MET $B \subseteq B_1 \cap B_2$

(4) ALS $B \in \mathcal{B}_x$ EN $y \in B$ DAN IS ER EEN $D \in \mathcal{B}_y$ MET $D \subseteq B$.

(1): ER IS EEN $B \in \mathcal{B}_x$ MET $B \subseteq X$

(2): AANNAME

(3): DOORSNEDE VAN TWEE OPEN VERZ'N IS OPEN

(4): B IS OPEN.

STEL X IS EEN VERZAMELING EN VOOR ELKE $x \in X$ IS EEN FAMILIE $\mathcal{B}_x$ GEKOZEN ZÓ DAT AAN (1), (2), (3), (4) IS VOLDAAN

DEFINIEER $\mathcal{T}$ DOOR

$$U \in \mathcal{T} \iff (\forall x \in U)(\exists B \in \mathcal{B}_x)(B \subseteq U)$$

- $\mathcal{T}$ IS EEN TOPOLOGIE
- VOOR ELKE x IS $\mathcal{B}_x$ EEN LOKALE BASIS (VOOR $\mathcal{T}$) IN x.

VOORBEELD NIEMYTZKI-VLAK

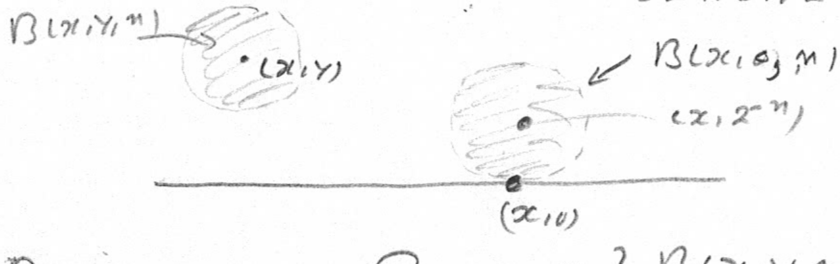
$$\mathcal{N} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$$

VOOR (x,y) MET $y > 0$ $\quad B(x,y,n) = B((x,y), 2^{-n})$

(DE GEWONE BOL IN $\mathbb{R}^2$)

VOOR $(x,0)$ EN $n \in \mathbb{N}$:

$$B(x,0,n) = \{(x,0)\} \cup \underbrace{B((x,2^{-n}), 2^{-n})}_{\text{GEWONE BOL IN } \mathbb{R}^2}$$



DEFINIEER $\mathcal{B}_{(x,y)} = \{B(x,y,n) : n \in \mathbb{N}\}$

DEZE TOEKENNING VOLDOET AAN (1), (2), (3), (4) EN BEPAALT DUS EEN TOPOLOGIE OP $\mathcal{N}$

- EERSTE AFTELBAARHEIDSAXIOMA:
  IN ELK PUNT BESTAAT EEN
  AFTELBARE LOKALE BASIS
- TWEEDE AFTELBAARHEIDSAXIOMA
  ER IS EEN AFTELBARE BASIS

HET TWEEDE AFT. AXIOMA IMPLICEERT HET EERSTE EN HET IMPLICEERT SEPARABILITEIT.

SUBBASIS

$(X, \mathcal{T})$ EEN TOPOLOGISCHE RUIMTE
$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ IS EEN <u>SUBBASIS</u> VOOR $\mathcal{T}$
ALS $\mathcal{S}^\wedge$ EEN BASIS IS
$(\mathcal{S}^\wedge = \{\bigcap \mathcal{S}' : \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S},\ \mathcal{S}' \text{ EINDIG}\})$

E<u>LKE</u> DEELFAMILIE $\underline{\mathcal{S}}$ VAN $\mathcal{P}(X)$ IS SUBBASIS VOOR EEN UNIEKE TOPOLOGIE OP X
WANT $\mathcal{S}^\wedge$ IS EEN BASIS VOOR ÉÉN TOPOLOGIE
NB $X = \bigcap \emptyset$

$\mathcal{S} = \{(\leftarrow, b) : b \in \mathbb{Q}\} \cup \{(a, \rightarrow) : a \in \mathbb{Q}\}$
IS EEN SUBBASIS VOOR DE GEWONE TOPOLOGIE VAN $\mathbb{R}$

$\mathcal{S} = \{(\leftarrow, b) : b \in \mathbb{Q}\} \cup \{[a, \rightarrow) : a \in \mathbb{R}\}$
IS EEN SUBBASIS VOOR DE SORGENFREY-TOPOLOGIE OP $\mathbb{S}$

$\mathcal{S} = \{X \setminus \{x\} : x \in X\}$
IS EEN SUBBASIS VOOR DE CO-EINDIGE TOPOLOGIE $\mathcal{T}_{CE}$ OP X.

OPGAVEN:

BEWIJS

- ELKE SEPARABLE METRISCHE RUIMTE HEEFT EEN AFTELBARE BASIS VOOR DE TOPOLOGIE

  HINT: ALS $D \subseteq X$ DICHT IS DAN IS
  $$\{B(x, 2^{-n}) : x \in D, n \in \mathbb{N}\}$$
  EEN BASIS

- DE SORGENFREY-LIJN $\mathbb{S}$ EN HET NIEMYTZK-VLAK N
  - VOLDOEN AAN HET EERSTE AFT. AXIOMA
  - ZIJN SEPARABEL
  - VOLDOEN NIET AAN HET TWEEDE AFTELBAARHEIDS AXIOMA.