2019-10-15

AFBEELDINGEN

- CONTINUE AFBEELDINGEN
- OPEN AFBEELDINGEN
- GESLOTEN AFBEELDINGEN.

(1) CONTINUÏTEIT.

GEGEVEN TWEE RUIMTEN $(X, \mathcal{T}_1)$ EN $(Y, \mathcal{T}_2)$
EEN AFBEELDING $f: X \longrightarrow Y$ IS
- CONTINU IN EEN PUNT $x \in X$ ALS VOOR ELKE OMGEVING V VAN $f(x)$ ER EEN OMGEVING U VAN x IS MET $f[U] \subseteq V$.

OPGAVE. BEWIJS:
DE VOLGENDE UITSPRAKEN ZIJN EQUIVALENT
- f IS CONTINU IN x
- VOOR ELKE OMGEVING V VAN $f(x)$ IS $f^{-1}[V]$ EEN OMGEVING VAN x
- VOOR ELKE <u>OPEN</u> OMGEVING V VAN $f(x)$ IS ER EEN <u>OPEN</u> OMGEVING U VAN x MET $f[U] \subseteq V$.
- ALS $\mathcal{B}$ EEN LOKALE BASIS IN x IS EN $\mathcal{C}$ EEN LOKALE BASIS IN $f(x)$ DAN GELDT: $(\forall C \in \mathcal{C})(\exists B \in \mathcal{B})(f[B] \subseteq C)$
- VOOR ELKE DEELVERZAMELING A VAN X GELDT: ALS $x \in \overline{A}$ DAN $f(x) \in \overline{f[A]}$

OPGAVE
VOOR METRISCHE RUIMTEN IS DEZE DEFINITIE EQUIVALENT MET DE GEWONE ε-δ-DEFINITIE.

EEN AFBEELDING $f : X \to Y$ IS
- CONTINU op X ALS
  f CONTINU IS IN ELK punt VAN X.

OPGAVE. BEWYS:
DE VOLGENDE UITSPRAKEN ZYN EQUIVALENT
- f IS CONTINU op X
- VOOR ELKE $O \in \mathcal{T}_2$ GELDT $f^{-1}[O] \in \mathcal{T}_1$
- VOOR ELKE DEELVERZ F VAN Y GELDT ALS F GESLOTEN IS DAN IS $f^{-1}[F]$ GESLOTEN
- VOOR ELKE DEELVERZAMELING A VAN X GELDT $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$

HET NUT EN GEMAK VAN (SUB)BASES

OPGAVE LAAT $\mathcal{B}$ EEN BASIS VOOR DE TOPOLOGIE VAN Y ZYN EN $\mathcal{S}$ EEN SUBBASIS. BEWYS DAT EQUIVALENT ZYN
- f IS CONTINU op X
- VOOR ELKE $B \in \mathcal{B}$ IS $f^{-1}[B]$ OPEN
- VOOR ELKE $S \in \mathcal{S}$ IS $f^{-1}[S]$ OPEN.

OPGAVE
LAAT $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ DE ENTIER-FUNCTIE ZYN
DUS $E(x) = \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$
ONDERZOEK DE CONTINUÏTEIT VAN E
- VAN DE GEWONE TOPOLOGIE NAAR DE SORGENFREY-TOPOLOGIE
- VAN DE SORGENFREY-TOPOLOGIE NAAR DE GEWONE
- VAN $\mathcal{T}_i$ NAAR $\mathcal{T}_d$; VAN $\mathcal{T}_d$ NAAR $\mathcal{T}_i$
- VAN DE GEWONE TOPOLOGIE NAAR $\mathcal{T}_{CE}$
- VAN $\mathcal{T}_{CE}$ NAAR DE GEWONE TOPOLOGIE

OPGAVE

LAAT $(X, \mathcal{T})$ EEN TOPOLOGISCHE RUIMTE ZIJN EN $A \subseteq X$. DE KARAKTERISTIEKE FUNCTIE VAN A. $\chi_A : X \to \{0,1\}$, IS CONTINU ALS AFBEELDING NAAR DE SIERPIŃSKI-RUIMTE S.
WAT BETEKENT DIT VOOR A?

EEN AFBEELDING $f : X \to Y$ IS
- OPEN ALS $f[O]$ OPEN IS, VOOR ELKE OPEN VERZAMELING $O \subseteq X$.
- GESLOTEN ALS $f[F]$ GESLOTEN IS, VOOR ELKE GESLOTEN VERZAMELING $F \subseteq X$.

OPGAVE LAAT $\mathcal{B}$ EEN BASIS VOOR DE TOPOLOGIE VAN X ZIJN.
BEWIJS: $f : X \to Y$ IS OPEN D.E.S.D.A VOOR ELKE $B \in \mathcal{B}$ IS $f[B]$ OPEN

VOORBEELD

① $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x, y) = x$
a) f IS OPEN
b) f IS NIET GESLOTEN

② $X = [0,1]^2$, $Y = [0,1]$ $f(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)$
a) f IS OPEN
b) f IS GESLOTEN

③ $X = [0,1]$, $Y = S^1$ $f(t) = e^{i2\pi t}$
a) f IS NIET OPEN
b) f IS GESLOTEN

④ $X = \{0,1\}$ MET DISCRETE TOPOLOGIE $\mathcal{T}_d$
$Y = \{0,1\}$ MET INDISCRETE TOPOLOGIE $\mathcal{T}_i$
$f(x) = x$
a) f IS CONTINU
b) f IS NIET OPEN
c) f IS NIET GESLOTEN

NOG STEEDS: EEN HOMEOMORFISME IS EEN CONTINUE BIJECTIE WAARVAN DE INVERSE OOK CONTINU IS.

QUOTIËNTAFBEELDINGEN

LAAT $(X, \mathcal{T}_1)$ EN $(Y, \mathcal{T}_2)$ TOPOLOGISCHE RUIMTEN ZIJN EN $f : X \to Y$ EEN AFBEELDING

OPGAVE

a) DE FAMILIE $\{ O : O \subseteq Y$ EN $f^{-1}[O] \in \mathcal{T}_1 \}$ IS EEN TOPOLOGIE OP Y, NOEM HEM $\mathcal{T}_f$

b) f IS CONTINU $\Leftrightarrow$ $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_f$.

ALS $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_f$ DAN HEET f EEN QUOTIËNTAFBEELDING.

(DUS ALS: O IS OPEN IN $Y \Leftrightarrow f^{-1}[O]$ IS OPEN IN X).

OPGAVE BEWIJS

a) f IS EEN QUOTIENTAFBEELDING D.E.S.D.A VOOR $F \subseteq Y$ GELDT: F GESLOTEN IN Y $\Leftrightarrow f^{-1}[F]$ GESLOTEN IN X

b) ALS f CONTINU EN OPEN IS DAN IS f EEN QUOTIËNTAFBEELDING.

c) ALS f CONTINU EN GESLOTEN IS DAN IS f EEN QUOTIËNTAFBEELDING.

BELANGRIJKE EIGENSCHAP

STEL $q : X \to Y$ IS EEN QUOTIËNT AFB.

ZIJ $f : Y \to Z$ EEN AFBEELDING, Z IS OOK EEN TOPOLOGISCHE RUIMTE.

DAN GELDT

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f \circ q"] \arrow[dr, "q"'] & & Z \\ & Y \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

f IS CONTINU D.E.S.D.A $f \circ q$ IS CONTINU

$\rightarrow$ DUIDELIJK

$\leftarrow$ ALS O OPEN IS IN Z DAN GELDT

$q^{-1}[f^{-1}[O]] = (f \circ q)^{-1}[O]$ IS OPEN IN X

DUS $f^{-1}[O] \in \mathcal{T}_q$, MAAR q IS QUOTIËNT

DUS $f^{-1}[O]$ IS OPEN IN Y.