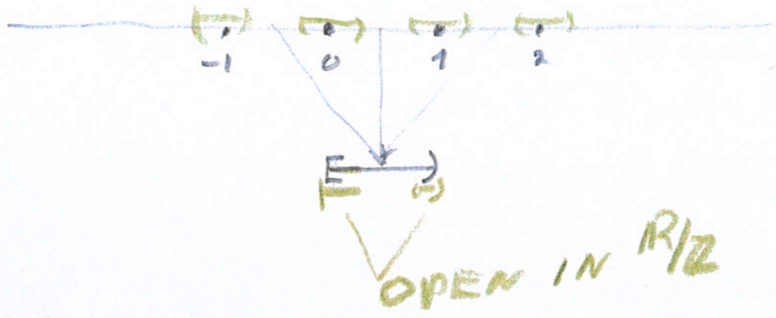
QUOTIËNTAFBEELDINGEN EN QUOTIËNTRUIMTEN

- Laat $(X, \mathcal{T}_X)$ en $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ruimten zijn en $f : X \to Y$ een afbeelding.
  De afbeelding bepaalt een topologie op Y naast de gegeven topologie $\mathcal{T}_Y$:
  $$\mathcal{T}_f = \{ A \subseteq Y : f^{-1}[A] \in \mathcal{T}_X \}$$
  Opgave: verifieer dat $\mathcal{T}_f$ een topologie is.
  Er geldt
  f is continu desda $\mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T}_f$.
  Dus $\mathcal{T}_f$ is de grootste topologie die f continu maakt.
  Als $\mathcal{T}_Y = \mathcal{T}_f$ dan noemen we f een quotiëntafbeelding.

- Gegeven een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ en een equivalentierelatie R op X.
  Notatie X/R is de verzameling equivalentieklassen; $q : X \to X/R$ de afbeelding gedef. door $q(x)$ = "the eq. klasse van x"
  De <u>quotiënttopologie</u> op X/R is $\mathcal{T}_q$ en $(X/R, \mathcal{T}_q)$ is de quotiëntruimte

  Voorbeeld op $\mathbb{R}$ definieer
  $x \sim y$ als $x - y \in \mathbb{Z}$
  Elk punt is equivalent met één punt in $[0,1)$: $x \sim x - E(x)$
  Dus $\mathbb{R}/\sim$, ook wel $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, kunnen we zien als de verzameling $[0,1)$



De quotiëntruimte is de cirkel

• VERBAND

ALS $f : (X, \mathcal{T}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ SURJECTIEF IS
DAN BEPAALT f EEN EQUIVALENTIERELATIE:

$x \, R_f \, y$ DESDA $f(x) = f(y)$

OPGAVE: ER IS EEN NATUURLIJKE BIJECTIE b TUSSEN X/R_f EN Y.

$$\begin{tikzcd}
 & (X, \mathcal{T}_X) \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X/R_f \arrow[rr, leftrightarrow, dashed, "b"] & & Y \\
f^{-1}(y) \arrow[rr, leftrightarrow] & & y
\end{tikzcd}$$

ER GELDT f IS EEN QUOTIËNT AFBEELDING DESDA DE BIJECTIE b EEN HOMEOMORFISME IS.

• NUTTIGE EIGENSCHAP

$$\begin{tikzcd}
(X, \mathcal{T}_X) \arrow[rr, "g \circ q"] \arrow[dr, "q"'] & & (Y, \mathcal{T}_Y) \\
 & (X/R, \mathcal{T}_q) \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

ER GELDT g IS CONTINU $\Longleftrightarrow$ $g \circ q$ IS CONTINU.

• VOORBEELD

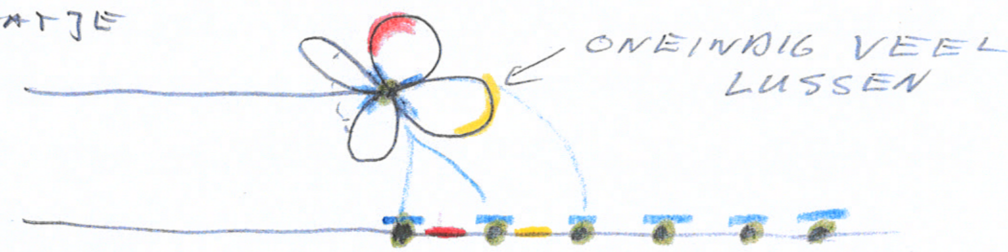
DEFINIEER, OP $\mathbb{R}$, DE RELATIE

$x \sim y$ DESDA $x = y$ OF $x, y \in \mathbb{N}$

ER IS ÉÉN GROTE EQ. KLASSE: $\mathbb{N}$

VOOR $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ IS $\{x\}$ EEN KLASSE

PLAATJE



EEN OPEN VERZAMELING OM HET PUNT $\mathbb{N}$

$\Updownarrow$

EEN OPEN VERZ IN $\mathbb{R}$ OM DE VERZ. $\mathbb{N}$

We noteren de ruimte als $\mathbb{R}/\mathbb{N}$
(anders dan bij $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$: alleen $\mathbb{N}$ is tot één punt samengenepen)

Het punt $\mathbb{N}$ heeft geen aftelbare lokale basis.

Vertaling naar $\mathbb{R}$

Als $\{O_n : n \in \mathbb{N}\}$ een rij open verzamelingen in $\mathbb{R}$ is met $\mathbb{N} \subseteq O_n$ voor alle n dan is er een open verz. O met $\mathbb{N} \subseteq O$ en $O_n \not\subseteq O$ voor alle n.

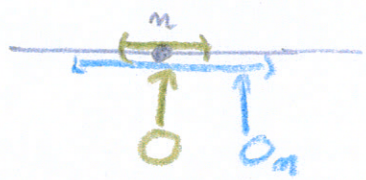
We diagonaliseren:

Voor elke n kiezen we $\varepsilon_n > 0$ zó dat
- $(n - 2\varepsilon_n, n + 2\varepsilon_n) \subseteq O_n$
- $2\varepsilon_n < \frac{1}{2}$

Neem nu

$$O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n - \varepsilon_n, n + \varepsilon_n).$$

Voor $n \in \mathbb{N}$ geldt
$(n + \varepsilon_n, n + 2\varepsilon_n) \subseteq O_n \setminus O$
dus $O_n \not\subseteq O$.



Opgave

Definieer op $\mathbb{R}$: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$

Noteer de quotiëntverzameling als $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$

Wat is de quotiënttopologie op $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ t.o.v.
- de gewone topologie van $\mathbb{R}$
- de Sorgenfreytopologie

EEN AFBEELDING $f : (X, \mathcal{T}_X) \to (Y, \mathcal{T}_Y)$
IS

OPEN ALS $f[T] \in \mathcal{T}_Y$ VOOR ELKE $T \in \mathcal{T}_X$
HET BEELD VAN ELKE OPEN VERZAMELING
... IS OPEN

GESLOTEN: ALS HET BEELD VAN ELKE
GESLOTEN VERZAMELING GESLOTEN IS

VOORBEELDEN

① $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\pi(x, y) = x$
IS EEN OPEN AFBEELDING
HET IS VOLDOENDE TE BEWIJZEN DAT
$\pi[B(x, \varepsilon)]$
OPEN IS VOOR ELKE x EN ELKE $\varepsilon > 0$
[WEGENS $f[\bigcup \mathcal{U}] = \bigcup\{f[U] : U \in \mathcal{U}\}$]
WELNU $\pi[B(x, \varepsilon)] = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$
DE AFB IS NIET GESLOTEN
$F = \{(x, y) : xy = 1\}$ IS GESLOTEN
$\pi[F] = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ IS NIET GESLOTEN.

② $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{N}$ IS GESLOTEN EN NIET OPEN
ALGEMEEN $f^{-1}[f[A]] = \begin{cases} A & \text{ALS } A \cap \mathbb{N} = \emptyset \\ A \cup \mathbb{N} & \text{ALS } A \cap \mathbb{N} \neq \emptyset \end{cases}$

- F GESLOTEN: $f^{-1}[f[F]]$ IS GESLOTEN, DUS
$f[F]$ IS GESLOTEN
- $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ IS OPEN $f^{-1}[f[(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})]] = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cup \mathbb{N}$
IS NIET OPEN DUS
$f[(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})]$ IS NIET OPEN.

OPGAVE: ALS f CONTINU EN OPEN OF GESLOTEN IS (EN SURJECTIEF) DAN IS f EEN QUOTIËNTAFBEELDING.