SCHEIDINGSEIGENSCHAPPEN

WE GAAN WAT INTERESSANTERE EIGENSCHAPPEN BEKIJKEN, WE MAKEN HET ONDERSCHEIDEND VERMOGEN VAN DE TOPOLOGIEËN STEEDS STERKER.

BIJVOORBEELD [$(X,\mathcal{T})$ IS STEEDS EEN TOP. RUIMTE]

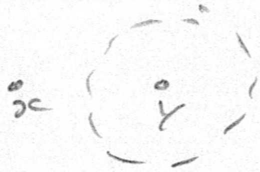
T_0: ALS $x \neq y$ DAN

$$\{O \in \mathcal{T} : x \in O\} \neq \{O \in \mathcal{T} : y \in O\}$$

[DE SIMPELSTE MANIER OM PUNTEN UIT ELKAAR TE HOUDEN]

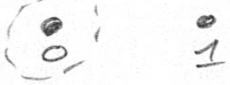
PLAATJE

OF



VOORBEELDEN

- S, DE SIERPIŃSKI-RUIMTE



- $\mathbb{R}$ MET $\mathcal{T}_R = \{(a,\to) : a \in \mathbb{R}\}$

  OF $\mathcal{T}_L = \{(\leftarrow,a) : a \in \mathbb{R}\}$

OPGAVE

X IS T_0 DESDA VOOR ELKE x EN y GELDT ALS $x \neq y$ DAN $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$

DESDA VOOR ELKE x EN y GELDT ALS $x \neq y$ DAN $x \notin \overline{\{y\}}$ OF $y \notin \overline{\{x\}}$.

DIT SOORT RUIMTEN KOMT VAAK VOOR IN DE THEORETISCHE INFORMATICA.

T_1: ALS $x \neq y$ DAN ZYN ER OPEN VERZAMELINGEN O_x EN O_y MET $x \in O_x \not\ni y$ EN $x \notin O_y \ni y$

PLAATJE

$\mathcal{T}_{CE}$ IS EEN T_1-TOPOLOGIE:
ALS $x \neq y$ NEEM
$O_x = \ldots\ldots$ EN $O_y = \ldots\ldots$

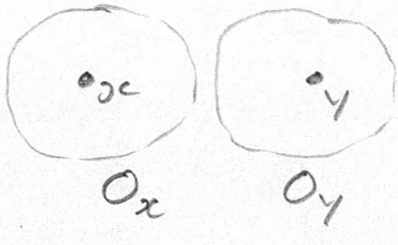
OPGAVE
$(X, \mathcal{T})$ IS T_1 DESDA VOOR ELKE x IS $\{x\}$ GESLOTEN
DESDA VOOR ELKE x GELDT $\{x\} = \bigcap\{O \in \mathcal{T} : x \in O\}$.
DESDA $\mathcal{T}_{CE} \subseteq \mathcal{T}$.

OOK T_1: METRISCHE RUIMTEN, $\mathbb{S}$, $\mathbb{N}$.

NIET T_1: SIERPIŃSKI-RUIMTE

VAN ONDERSCHEIDEN NAAR SCHEIDEN

T_2 OF HAUSDORFF
ALS $x \neq y$ DAN ZYN ER OPEN VERZAMELINGEN O_x EN O_y MET
$x \in O_x$, $y \in O_y$ EN $O_x \cap O_y = \emptyset$



VOORBEELDEN

- $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{CE})$ IS <u>NIET</u> HAUSDORFF
- METRISCHE RUIMTEN, $\mathbb{S}$, N WEL

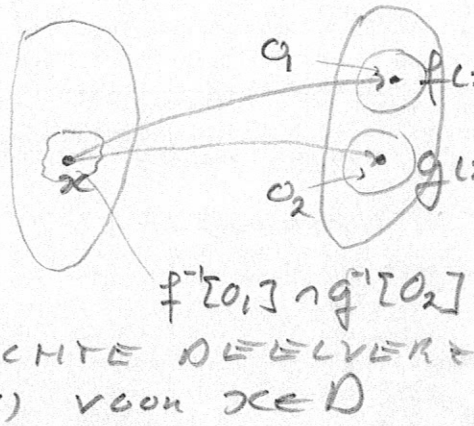
STELLING: $(X, \mathcal{T})$ IS HAUSDORFF DESDA
VOOR ELKE x GELDT
$$\{x\} = \bigcap \{\overline{O} : O \in \mathcal{T}, x \in O\}$$

EEN RIJ $(x_n)_n$ IN X CON<u>VERGEERT</u> NAAR x
ALS VOOR ELKE OMGEVING U VAN x
ER EEN N IS ZÓDAT VOOR ELKE
$n \geqslant N$ GELDT $x_n \in U$.

ALS $(X, \mathcal{T})$ HAUSDORFF IS EN DE RIJ $(x_n)_n$
CONVERGEERT NAAR x EN NAAR y
DAN GELDT $x = y$.

OPGAVE
IN $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{CE})$ CONVERGEERT $(x_n)_n$
MET $x_n = n$ VOOR ALLE n NAAR
<u>ELK</u> PUNT VAN $\mathbb{N}$.

STEL f EN g ZIJN CONTINUE AFBEELDINGEN
VAN X NAAR Y WAARBIJ Y HAUSDORFF IS
DAN IS $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ GESLOTEN.



GEVOLG: ALS ER EEN DICHTE DEELVERZ D
IS MET $f(x) = g(x)$ VOOR $x \in D$
DAN GELDT $f = g$.

TOEPASSING

(1) ZIJ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ CONTINU EN ADDITIEF
DAN IS f LINEAIR
ADDITIEF : $f(x+y)=f(x)+f(y)$ [HOMOMORFISME T.O.V. +]
LINEAIR : OOK $f(\lambda x)=\lambda f(x)$

$\lambda\in\mathbb{N}$: ADDITIVITEIT GEEFT
$f(\lambda x)=f(\underbrace{x+x+\dots+x}_{\lambda})=\underbrace{f(x)+f(x)+\dots+f(x)}_{\lambda}=\lambda f(x)$
$\lambda\in\mathbb{Z}$ $\left.\begin{array}{l} f(-x)=-f(x) \\ f(0)=0 \end{array}\right\}$ (HOMOMORFISME!)
$\lambda=\frac{1}{n}$ $f(x)=f(\frac{1}{n}x+\frac{1}{n}x+\dots+\frac{1}{n}x)=n\cdot f(\frac{1}{n}x)$
$\lambda=\frac{t}{n}$ COMBINEREN
IHB ALS $q\in\mathbb{Q}$ DAN $f(q)=q\cdot f(1)$
Nu: - f IS CONTINU
- $g: x\mapsto x\cdot f(1)$ IS CONTINU
- $\mathbb{Q}\subseteq\{x : f(x)=g(x)\}$
<u>DUS</u> $f=g$ EN WE ZIEN $f(x)=f(1)\cdot x$ VOOR ALLE x.

(2) a) STEL $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ IS EEN INWENDIG-PRODUCT-RUIMTE. BEWIJS DAT DE NORM AAN DE PARALLELLOGRAMWET VOLDOET:
$$2\|x\|^2+2\|y\|^2=\|x+y\|^2+\|x-y\|^2$$
b) STEL $(V,\|\cdot\|)$ IS EEN GENORMEERDE RUIMTE DIE AAN DE PARALLELLOGRAMWET VOLDOET
BEWIJS DAT $\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$ EEN I.P. DEFINIEERT DAT DE NORM BEPAALT.
(i) NEEM x VAST; LAAT ZIEN DAT DE AFBEELDING $y\mapsto\langle x,y\rangle$ ADDITIEF EN CONTINU IS
(ii) NEEM OOK y VAST; BEWIJS DAT
$$\langle x,qy\rangle=q\langle x,y\rangle \quad (\text{VOOR } q\in\mathbb{Q})$$
(iii) BEWIJS $\langle x,\lambda y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle$ (VOOR $\lambda\in\mathbb{R}$)