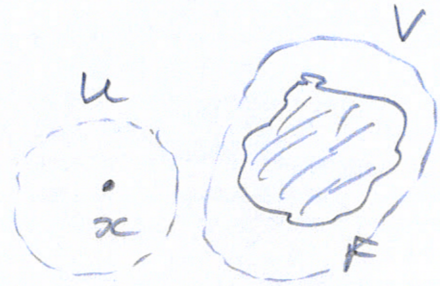
Nog meer scheiding.

$(X, \mathcal{T})$ is een T_3-ruimte als voor elke gesloten verzameling F en elk punt x met $x \notin F$ disjuncte open verzamelingen U en V bestaan met $x \in U$ en $F \subseteq V$.



We noemen $(X, \mathcal{T})$ <u>regulier</u> als deze T_0 en T_3 is.

Voorbeelden

- $\mathcal{T}_c$ is een T_3-topologie (flauw maar waar)
- metrische ruimten zijn regulier:
  neem $\varepsilon > 0$ zodat $B(x, 3\varepsilon) \cap F = \emptyset$
  neem $U = B(x, \varepsilon)$
  en $V = \{y : d(x,y) > 2\varepsilon\}$
- $\mathbb{S}$ is regulier
  neem $\varepsilon > 0$ met $[x, x+\varepsilon) \cap F = \emptyset$
  neem $U = [x, x+\varepsilon)$
  en $V = \mathbb{S} \setminus [x, x+\varepsilon)$.

Stelling regulier $\Rightarrow$ Hausdorff

stel $x \neq y$. T_0 zegt $x \notin \overline{\{y\}}$ of $y \notin \overline{\{x\}}$

T_3 zegt dan (in beide gevallen) x en y hebben disjuncte omgevingen.

VOORBEELD

Neem $\mathbb{R}$ met de gewone topologie $\mathcal{T}$.
Maak een grotere topologie $\mathcal{T}_a$
door $C = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ als extra gesloten verzameling toe te voegen.

Dus: lokale basis in $x \neq 0$: $\{(x-\varepsilon, x+\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$
lokale basis in 0 : $\{(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus C : \varepsilon > 0\}$

- $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_a)$ is Hausdorff want dat was $\mathbb{R}$ zelf al.
- $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_a)$ is niet regulier
  er geldt $0 \notin C$ en C is gesloten
  neem U en V open in $\mathcal{T}_a$
  met $0 \in U$ en $C \subseteq V$.
  - neem $\varepsilon > 0$ met $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus C \subseteq U$.
  - voor elke n neem $\varepsilon_n > 0$
    met $(2^{-n} - \varepsilon_n, 2^{n} + \varepsilon_n) \subseteq V$.
  - er is een $n \in \mathbb{N}$ met $2^{-n} < \varepsilon$.
    dan geldt $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus C \cap (2^{-n} - \varepsilon_n, 2^{-n} + \varepsilon_n) \neq \emptyset$
  - Conclusie $U \cap V \neq \emptyset$.

OPGAVE

Maak de gewone topologie van $\mathbb{R}$ groter tot een topologie $\mathcal{T}_Q$ door $\mathbb{Q}$ als extra open verzameling toe te voegen.

a) Toon aan $\mathcal{T}_Q = \mathcal{T} \cup \{O \cap \mathbb{Q} : O \in \mathcal{T}\}$.

b) Toon aan dat $\mathcal{T}_Q$ niet regulier is.

STELLING:

$(X, \mathcal{T})$ is regulier d.e.s.d.a.
voor elke $x \in X$ en elke $U \in \mathcal{T}$ met $x \in U$ een $V \in \mathcal{T}$ bestaat
zó dat $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

BEWYS $\Rightarrow$ GEGEVEN U EN x LAAT $F = X \setminus U$.
NEEM O_1 EN O_2 MET $x \in O_1$, $F \subseteq O_2$
EN $O_1 \cap O_2 = \emptyset$
DAN $\overline{O_1} \cap O_2 = \emptyset$ DVS $\overline{O_1} \cap F = \emptyset$
DVS $\overline{O_1} \subseteq U$.

$\Leftarrow$ GEGEVEN x EN F LAAT $U = X \setminus F$
NEEM V MET $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$
DAN ZYN V EN $W = X \setminus \overline{V}$ OPEN
EN DISJUNCT, EN $F \subseteq W$.

VOORBEELD
HET NIEMYTZKI-VLAK IS REGULIER
VOOR ELKE x EN n GELDT (OPGAVE)
$$\overline{B(x,0,n)} = \{(u,v) : \|(u,v) - (x, 2^{-n})\| \leq 2^{-n}\}$$
DUS VOOR ELKE n GELDT
$$\overline{B(x,0,n+1)} \subseteq B(x,0,n)$$

OPGAVE: BEWYS DAT DE 'LUSJESRUIMTE' $\mathbb{R}/\mathbb{N}$ REGULIER IS.

EEN RUIMTE $(X, \mathcal{T})$ IS EEN T_4-RUIMTE ALS
VOOR ELK TWEETAL DISJUNCTE GESLOTEN VERZAMELINGEN F EN G DISJUNCTE OPEN VERZAMELINGEN U EN V BESTAAN MET $F \subseteq U$ EN $G \subseteq V$.

EEN RUIMTE IS <u>NORMAAL</u> ALS DEZE T_4 EN T_1 IS.

OPGAVE: NORMAAL $\Rightarrow$ REGULIER

Opgave

$(X, \mathcal{T})$ is T_4 - desda voor elke gesloten verzameling F en elke open verzameling U met $F \subseteq U$ een open verzameling V bestaat zó dat $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Opgave: Bewijs dat equivalent zijn:

a) X is T_4

b) Als U en V open zijn met $U \cup V = X$ dan zijn er gesloten verz'n F en G met $F \subseteq U$, $G \subseteq V$ en $F \cup G = X$

c) Als U en V open zijn met $U \cup V = X$ dan zijn er open verz'n O_u en O_v met $\overline{O_u} \subseteq U$, $\overline{O_v} \subseteq V$ en $O_u \cup O_v = X$.

d) Als F en G gesloten en disjunct zijn dan zijn open verzamelingen U en V zó dat $F \subseteq U$, $G \subseteq V$ en $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.

Voorbeelden

- Metrische ruimten zijn normaal
  Gegeven F en G laat
  $U = \{x : d(x,F) < d(x,G)\}$ en
  $V = \{x : d(x,G) < d(x,F)\}$
- De ruimte $\mathbb{S}$ is normaal
  Gegeven F en G definieer
  voor $x \in F$: $\varepsilon_x = \sup\{r > 0 : [x, x+r) \cap G = \emptyset\}$
  voor $x \in G$: $\varepsilon_x = \sup\{r > 0 : [x, x+r) \cap F = \emptyset\}$

  Toon aan: als $x \in F$ en $y \in G$ dan
  $$[x, x+\varepsilon_x) \cap [y, y+\varepsilon_y) = \emptyset.$$
  Neem dus $U = \bigcup\{[x, x+\varepsilon_x) : x \in F\}$
  en $V = \bigcup\{[x, x+\varepsilon_x) : x \in G\}$

VOORBEELD
DE RUIMTE $\mathbb{R}/\mathbb{N}$ IS NORMAAL
DIT VOLGT UIT

STELLING:
ALS X NORMAAL IS EN $f: X \rightarrow Y$ IS CONTINU, GESLOTEN EN SURJECTIEF DAN IS Y NORMAAL.

BEWYS
NEEM F EN G GESLOTEN EN DISJUNCT IN Y, EN BEKYK (NATUURLYK) $f^{-1}[F]$ EN $f^{-1}[G]$.
DEZE ZYN GESLOTEN EN DISJUNCT IN X.
NEEM U EN V OPEN EN DISJUNCT IN X MET $f^{-1}[F] \subseteq U$ EN $f^{-1}[G] \subseteq V$.
EN NU? .... BEKYK $X \setminus U$ EN $X \setminus V$
DIE ZYN GESLOTEN EN $(X \setminus U) \cup (X \setminus V) = X$.
DUS $f[X \setminus U]$ EN $f[X \setminus V]$ ZYN GESLOTEN EN $f[X \setminus U] \cup f[X \setminus V] = Y$.
DUS $O_1 = Y \setminus f[X \setminus U]$ EN $O_2 = Y \setminus f[X \setminus V]$ ZYN OPEN EN DISJUNCT.
MAAR $f^{-1}[F] \cap X \setminus U = \emptyset$ DUS $F \cap f[X \setminus U] = \emptyset$
EN DUS $F \subseteq O_1$
EVENZO: $G \subseteq O_2$.

VOORBEELD. HET NIEMYTZKI-VLAK IS NIET NORMAAL.
EN DE DISJUNCTE GESLOTEN VERZAMELINGEN DIE DIT LATEN ZIEN ZYN ....?
WAARSCHYNLYK DEELVERZAMELINGEN VAN DE x-AS.
BYV $F = \{(x,0) : x \leq 0\}$ EN $G = \{(x,0) : x > 0\}$?
NEE: MAAK OPENVERZ'N U EN V MET $F \subseteq U$, $G \subseteq V$ EN $U \cap V = \emptyset$.
WAT DAN WEL? .....

....