Neem $F = \{(q,0) : q \in \mathbb{Q}\}$

$G = \{(p,0) : p \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}$

Ga na: F en G zijn gesloten en $F \cap G = \emptyset$.

Laat U en V open zijn met

$F \subseteq U$ en $G \subseteq V$.

Te bewijzen: $U \cap V \neq \emptyset$.

Voor elke $p \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ definiëren we

$$n_p = \min\{n : B(p,0,n) \subseteq V\}$$

En idem voor $q \in \mathbb{Q}$: $n_q = \min\{n : B(q,0,n) \subseteq U\}$.

Schrijf nu

$$G_n = \{p \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} : n_p = n\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

en merk op dat (natuurlijk)

$$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n.$$

Opgave: neem $m \in \mathbb{N}$ vast

stel $(x_n)_n$ is een rij in $\mathbb{R}$ met $\lim x_n = x$

dan geldt

$$B(x,0,m)\setminus\{(x,0)\} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(x_n,0,m).$$

Er geldt dus $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n \cup \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \{q\}$

Pas de categoriestelling van Baire toe:

Er is een m met $\operatorname{int} \operatorname{cl} G_m \neq \emptyset$ (in $\mathbb{R}$)

Neem nu $q \in \mathbb{Q} \cap \operatorname{int} \operatorname{cl} G_m$

Dus in $\mathbb{R}$ geldt $q \in \overline{G_m}$;

er is dus een rij $(p_n)_n$ in G_m

die naar q convergeert.

Met de opgave volgt nu

$$B(q,0,m)\setminus\{(q,0)\} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(p_n,0,m) \subseteq V.$$

Maar dan volgt dat

$$\emptyset \neq B(q,0,n_q) \cap (B(q,0,m)\setminus\{(q,0)\}) \subseteq U \cap V.$$

2019 - 10 - 29

②

EEN PAAR NIET-TRIVIALE STELLINGEN

1 LEMMA VAN URYSOHN

2 REGULIER + AFT. BASIS $\Rightarrow$ NORMAAL

3 REGULIER + AFT. BASIS $\Rightarrow$ METRISEERBAAR

1 LEMMA VAN URYSOHN

EEN TOPOLOGISCHE RUIMTE $(X, \mathcal{T})$ HEEFT DE T_4 - EIGENSCHAP DESDA VOOR ELK TWEETAL DISJUNCTE VERZAMELINGEN F EN G EEN CONTINUE FUNCTIE $f: X \to [0,1]$ BESTAAT ZÓ DAT $f(x) = 0$ VOOR $x \in F$ EN $f(x) = 1$ VOOR $x \in G$.

BEWYS:

$\Leftarrow$ IS DUIDELYK, GEGEVEN f LAAT $U = f^{-1}[[0, 1/3)]$ EN $V = f^{-1}[(2/3, 1]]$

$\Rightarrow$ IS MEER WERK.

WE GEBRUIKEN DE T_4-EIGENSCHAP HERHAALDELYK

LAAT F EN G GEGEVEN ZYN

① WE BEPALEN VOOR ELKE $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ EEN OPEN VERZAMELING U_q EN WEL ZÓ DAT $F \subseteq U_0$, $U_1 \subseteq X \setminus G$ EN ALS $p < q$ DAN $\overline{U_p} \subseteq U_q$.

TEL $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ AF $\langle q_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ MET $q_0 = 0$ EN $q_1 = 1$

- STEL $U_{q_1} = U_1 = X \setminus G$ EN GEBRUIK DE T_4-EIGENSCHAP OM $U_{q_0} = U_0$ TE VINDEN MET $F \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_1$
- NEEM AAN DAT $n \geq 2$ EN DAT $U_{q_0}, U_{q_1}, \ldots, U_{q_{n-1}}$ GEVONDEN ZYN MET DE JUISTE EIGENSCHAPPEN.

NEEM $r = \max\{q_i : i < n \wedge q_i < q_n\}$

EN $s = \min\{q_i : i < n \wedge q_n < q_i\}$

(DUS ALS $n = 2$ DAN $r = q_0 = 0$ EN $s = q_1 = 1$)

GEBRUIK DE T_4-EIGENSCHAP OM
U_{q_n} TE BEPALEN MET

$$\overline{U_r} \subseteq U_{q_n} \subseteq \overline{U_{q_n}} \subseteq U_s$$

AAN HET EIND VAN DEZE RECURSIE
HEBBEN WE DE GEWENSTE FAMILIE
$\{U_q : q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$.

② DEFINIEER $f : X \to [0,1]$ DOOR

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{q : x \in U_q\} & x \in U_1 \\ 1 & x \notin U_1 \end{cases}$$

DUIDELYK : $x \in G \to f(x) = 1$
$x \in F \to f(x) = 0 \quad (x \in U_0)$

③ LAAT $r \in (0,1)$; WE BEWYZEN DAT
$f^{-1}[[0,r)]$ EN $f^{-1}[(r,1]]$
OPEN ZYN; DAT VOLSTAAT WEGENS DE
SUBBASIS KARAKERISERING VAN CONTINUÏTEIT.

- ER GELDT $f(x) < r$ DESDA
  $\inf\{q : x \in U_q\} < r$ DESDA
  $(\exists q < r)(x \in U_q)$ DESDA
  $x \in \bigcup_{q<r} U_q$.

  DUS $f^{-1}[[0,r)] = \bigcup_{q<r} U_q$ IS OPEN.
- ER GELDT $f(x) > r$ DESDA
  $(\exists q)\ r < q < f(x)$ DESDA
  $(\exists q > r)\ x \notin U_q$ DESDA
  $(\exists p > r)\ x \notin \overline{U_p}$ DESDA
  $x \in \bigcup_{p>r} X \setminus \overline{U_p}$

  DUS $f^{-1}[(r,1]] = \bigcup_{p>r} X \setminus \overline{U_p}$ IS OPEN.

KLAAR!