2. ZIJ $(X, \mathcal{T})$ REGULIER MET EEN AFTELBARE BASIS; DAN IS X NORMAAL

ZIJ $\mathcal{B}$ EEN AFTELBARE BASIS VOOR X.
LAAT F EN G GESLOTEN EN DISJUNCT ZIJN.
HOE BOUWEN WE U EN V ??

- ALS $x \in F$ DAN IS ER EEN $B \in \mathcal{B}$ MET $x \in B$ EN $\overline{B} \subseteq X \setminus G$.
- ALS $x \in G$ DAN IS ER EEN $B \in \mathcal{B}$ MET $x \in B$ EN $\overline{B} \subseteq X \setminus F$.
- NEEM $\mathcal{B}_F = \{B \in \mathcal{B} : B \cap F \neq \emptyset$ EN $\overline{B} \cap G = \emptyset\}$
- NEEM $\mathcal{B}_G = \{B \in \mathcal{B} : B \cap G \neq \emptyset$ EN $\overline{B} \cap F = \emptyset\}$
- WE HEBBEN GEZIEN: $F \subseteq \bigcup \mathcal{B}_F$ EN $G \subseteq \bigcup \mathcal{B}_G$.
- DE FAMILIES $\mathcal{B}_F$ EN $\mathcal{B}_G$ ZIJN AFTELBAAR; TEL ZE AF:
  $\mathcal{B}_F = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ $\quad$ $\mathcal{B}_G = \{C_n : n \in \mathbb{N}\}$
- PAS DE VERZAMELINGEN AAN:

$$U_0 = B_0 \qquad V_0 = C_0 \setminus \overline{B_0}$$
$$U_1 = B_1 \setminus \overline{C_0} \qquad V_1 = C_1 \setminus (\overline{B_0} \cup \overline{B_1})$$
$$\vdots$$
$$U_n = B_n \setminus \bigcup_{i<n} \overline{C_i} \qquad V_n = C_n \setminus \bigcup_{i \leq n} \overline{B_i}$$

- LAAT $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ EN $V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$.
  - $F \subseteq U$ STEL $x \in F$ EN DUS $x \in B_n$ VOOR EEN n; MAAR $x \notin \bigcup_{i<n} \overline{C_i}$ DUS $x \in U_n$
  - $G \subseteq V$ IDEM
  - $U \cap V = \emptyset$

    NEEM n EN m WILLEKEURIG

    ALS $n \leq m$ DAN $U_n \cap V_m \subseteq B_n \cap V_m = \emptyset$

    ALS $n > m$ DAN $U_n \cap V_m \subseteq U_n \cap C_m = \emptyset$

3 ALS $(X, \mathcal{T})$ REGULIER IS MET EEN AFTELBARE BASIS DAN IS ER EEN METRIEK d OP X DIE DE TOPOLOGIE BEPAALT

ZIJ $\mathcal{B}$ EEN AFTELBARE BASIS VOOR X.
BEKIJK DE VERZAMELING PAREN

$$\{(B_1, B_2) : B_1, B_2 \in \mathcal{B};\ \overline{B_1} \subseteq B_2;\ B_1 \neq \emptyset\}$$

TEL DE VERZAMELING AF:

$$\{(B_{n,1}, B_{n,2}) : n \in \mathbb{N}\}$$

NEEM VOOR ELKE n EEN CONTINUE FUNCTIE $f_n : X \longrightarrow [0,1]$ ZÓ DAT

$f_n(x) = 1$ ALS $x \in \overline{B_{n,1}}$

$f_n(x) = 0$ ALS $x \notin B_{n,2}$

DEFINIEER $d(x,y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} |f_n(x) - f_n(y)|$

- $d(x,y) \geq 0$ DUIDELIJK
- $d(x,x) = 0$ DUIDELIJK
- $d(x,y) = 0 \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| = 0$ VOOR ALLE n.

  $\Rightarrow f_n(x) = f_n(y)$ VOOR ALLE n

  $\Rightarrow x = y$

  [IMMERS ALS $x \neq y$ DAN ZIJN ER B_1 EN B_2 IN $\mathcal{B}$ MET $x \in B_1 \subseteq \overline{B_1} \subseteq B_2 \subseteq X \setminus \{y\}$ EN DAN $f_n(x) = 1$ EN $f_n(y) = 0$ ALS $(B_1, B_2) = (B_{n,1}, B_{n,2})$]
- $d(x,y) = d(y,x)$ DUIDELIJK
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ OOK DUIDELIJK

  WANT $|f_n(x) - f_n(z)| \leq |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_n(z)|$ VOOR ALLE n.

DUS d IS EEN METRIEK.

WAAROM BEPAALT d DE TOPOLOGIE?

- STEL $O \in \mathcal{T}$ EN $x \in O$

  NEEM EEN n MET $x \in B_{n,1} \subseteq \overline{B_{n,1}} \subseteq B_{n,2} \subseteq O$.

  VOOR $y \in X \setminus O$ GELDT DAN

  $$d(x,y) \geq 2^{-n} |f_n(x) - f_n(y)| = 2^{-n} \cdot |1-0| = 2^{-n}$$

  CONCLUSIE $B(x, 2^{-n}) \subseteq O$.

  DIT BEWIJST: ELKE $O \in \mathcal{T}$ IS OPEN T.O.V. d.

- OMGEKEERD:
  NEEM x VAST
  VOOR ELKE n IS DE FUNCTIE
  $$y \mapsto |f_n(x) - f_n(y)|$$
  CONTINU; WEGENS UNIFORME CONVERGENTIE
  (M-TEST) IS $g_x : y \mapsto d(x,y)$ DUS OOK
  CONTINU.
  DUS $B(x,r) = \{y : d(x,y) < r\}$
  $$= g_x^{-1}[[0,r)]$$
  IS OPEN
  DIT BEWIJST: ELKE d-OPEN VERZAMELING
  BEHOORT TOT $\mathcal{T}$.
  KLAAR!

WAT NOG MEER

- VERSTERKING VAN DE T_4-EIGENSCHAP
  ALS X EEN T_4-RUIMTE IS EN F EN G
  ZIJN F_σ-VERZAMELINGEN DIE VOLDOEN
  AAN $\overline{F} \cap G = F \cap \overline{G} = \emptyset$
  DAN ZIJN ER DISJUNCTE OPEN VERZAMELINGEN
  U EN V MET $F \subseteq U$ EN $G \subseteq V$
  F_σ-VERZ: $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ MET ELKE F_n GESLOTEN
- STELLING VAN TIETZE-URYSOHN
  EEN RUIMTE $(X, \mathcal{T})$ IS T_4 DESDA
  VOOR ELKE GESLOTEN $F \subseteq X$ EN ELKE
  CONTINUE $f: F \to \mathbb{R}$ EEN CONTINUE
  $g: X \to \mathbb{R}$ BESTAAT MET $g \restriction F = f$
  MET ANDERE WOORDEN g IS EEN CONTINUE
  UITBREIDING VAN f.

LET D BE COUNTABLE AND DENSE IN $\mathbb{R}$
THERE IS A HOMEOMORPHISM $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
SUCH THAT $f[D] = \mathbb{Q}$.

TWO STEPS

1. THERE IS AN ORDER-ISOMORPHISM $h : D \to \mathbb{Q}$
2. FROM h DEFINE f BY

$$f(x) = \sup\{ h(d) : d \in D,\ d < x \}$$

THEN f IS ALSO AN ISOMORPHISM [PROVE THIS]
AND HENCE CONTINUOUS AND OPEN
AS INTERVALS ARE MAPPED TO INTERVALS.

1. • SEE LOGIC (MENDELSON p.112, EXAMPLE 2)

OR

• SEE DICTAAT VERZAMELINGENLEER pp. 8-9.

OR

• FILL IN THE DETAILS IN THIS SKETCH

ENUMERATE D AS $\{d_n : n \in \mathbb{N}\}$
AND $\mathbb{Q}$ AS $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$

BUILD h BY RECURSION

- $h(d_1) = q_1$ SET $n_1 = 1$
- TO DEFINE $h(d_k)$, GIVEN $h(d_i)$ FOR $i < k$
  LET n_k BE THE FIRST n SUCH
  THAT $(\forall i < k)(d_k < d_i \leftrightarrow q_n < q_{n_i})$
  AND DEFINE $h(d_k) = q_{n_k}$.
- PROVE: $h : D \to \mathbb{Q}$ IS ORDER-PRESERVING
- PROVE: h IS SURJECTIVE
  BY INDUCTION ON n PROVE
  $\{q_j : j \leq n\} \subseteq h[D]$.