DE STELLING VAN TIETZE-URYSOHN

ZIJ X EEN T_4-RUIMTE, EN F EEN GESLOTEN DEELVERZAMELING VAN X, EN LAAT $f: F \to \mathbb{R}$ CONTINU ZIJN.
DAN IS ER EEN CONTINUE $g: X \to \mathbb{R}$ DIE f UITBREIDT, D.W.Z., $g(x) = f(x)$ VOOR $x \in F$.

GEVAL 1: f IS BEGRENSD EN Z.B.D.A. $f: F \to [-1, 1]$.

HET BEWIJS GAAT ANALOOG AAN DAT VAN HET LEMMA VAN URYSOHN.

DEFINIEER, VOOR $q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$, EERST

$A_q = \{x \in F : f(x) < q\}$ EN

$B_q = \{x \in F : f(x) > q\}$

WE DEFINIËREN OPEN VERZAMELINGEN U_q, VOOR $q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$ ZÓ DAT

- ALS $p < q$ DAN $\overline{U_p} \subseteq U_q$
- $A_q \subseteq U_q$ EN $\overline{U_q} \cap B_q = \emptyset$.

WE BEGINNEN MET

$U_{-1} = \emptyset$ EN $U_1 = X \setminus \{x \in F : f(x) = 1\}$

TEL $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$ AF ALS $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ MET $q_0 = -1$ EN $q_1 = 1$.

LAAT $n \geq 2$ EN NEEM AAN DAT U_{q_i} BEPAALD IS VOOR $i < n$ ZÓ DAT AAN ALLE VOORWAARDEN IS VOLDAAN.

NEEM $i, j < n$ ZÓ DAT

$q_i = \max\{q_k : k < n, q_k < q_n\}$ EN

$q_j = \min\{q_k : k < n, q_k > q_n\}$

WE MAKEN U_{q_n} MET $\overline{U_{q_i}} \subseteq U_{q_n} \subseteq \overline{U_{q_n}} \subseteq U_{q_j}$ EN $A_{q_n} \subseteq U_{q_n}$ EN $U_{q_n} \cap B_{q_n} = \emptyset$.

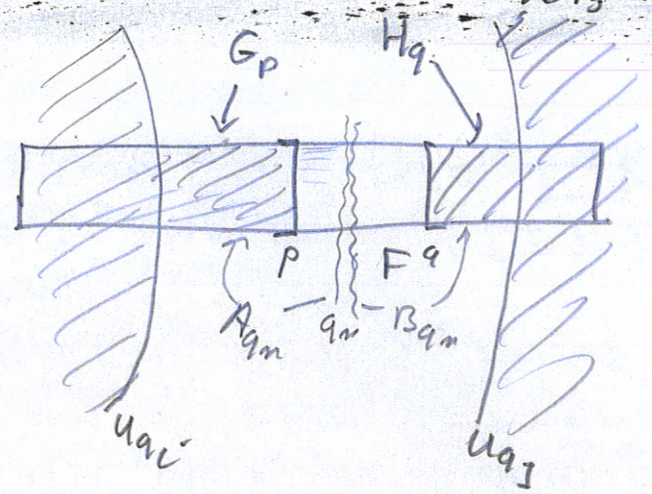
EVEN WAT NOTATIE:

VOOR $q \in \mathbb{Q} \cap (q_i, q_j)$ SCHRIJVEN WE

$G_q = \overline{U_{q_i}} \cup \{x \in F : f(x) \leq q\}$ EN

$H_q = X \setminus U_{q_j} \cup \{x \in F : f(x) \geq q\}$.

PLAATJE:



MERK OP:

- G_q EN H_q ZIJN GESLOTEN
- $\bigcup_{p<q_n} G_p = \overline{U_{q_i}} \cup A_{q_n}$
- $\bigcup_{p>q_n} H_p = X\setminus U_{q_j} \cup B_{q_n}$
- $\overline{U_{q_i}} \cup \overline{A_{q_n}} \subseteq \overline{U_{q_i}} \cup G_{q_n}$

  DUS $\overline{\overline{U_{q_i}} \cup A_{q_n}} \cap ((X\setminus U_{q_j}) \cup B_{q_n}) = \emptyset$
- $X\setminus U_{q_j} \cup \overline{B_{q_n}} \subseteq (X\setminus U_{q_j}) \cup H_{q_n}$

  DUS $(X\setminus U_{q_j} \cup \overline{B_{q_n}}) \cap (\overline{U_{q_i}} \cup A_{q_n}) = \emptyset$.

RESULTAAT VAN VORIGE KEER [VERSTERKING]
ER ZIJN DISJUNCTE OPEN VERZ'N U EN V
MET $\overline{U_{q_i}} \cup A_{q_n} \subseteq U$ EN $(X\setminus U_{q_j}) \cup B_{q_n} \subseteq V$

NEEM DUS $U_{q_n} = U$.

DEFINIEER g ALS IN HET LEMMA VAN URYSOHN

$$g(x) = \inf\{q : x\in U_q\} \qquad g(x)=1 \text{ ALS } f(x)=1$$

ALS EERDER: g IS CONTINU.

LAAT $x\in F$: ALS $q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]$

DAN GELDT $f(x)<q \Leftrightarrow x\in A_q \to x\in U_q$

$f(x)>q \Leftrightarrow x\in B_q \to x\notin \overline{U_q}$

EN DUS $\left.\begin{array}{l} f(x)<q \to g(x)\le q \\ f(x)>q \to g(x)\ge q \end{array}\right\} f(x)=g(x).$

HINT VOOR DE VERSTERKING: $F=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ EN
$G=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ MET ELKE F_n EN G_n GESLOTEN
EN $\overline{F}\cap G = F\cap\overline{G}=\emptyset$.

NEEM U_n EN V_n OPEN MET $F_n\subseteq U_n\subseteq\overline{U_n}\subseteq X\setminus\overline{G}$
EN $G_n\subseteq V_n\subseteq\overline{V_n}\subseteq X\setminus\overline{F}$ EN VOLG HET
BEWIJS VAN "REGULIER + AFT. BASIS $\longrightarrow$ NORMAAL".

OPGAVE

EEN FORMULE VAN HAUSDORFF

ZY (X,d) EEN METRISCHE RUIMTE, F EEN GESLOTEN DEELVERZAMELING EN $f: F \to [0,1]$ CONTINU

DEFINIEER $g: X \to [0,1]$ DOOR

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in F) \\ \inf\{f(a) + \frac{d(x,a)}{d(x,F)} - 1 : a \in F\} & (x \notin F) \end{cases}$$

BEWYS DAT g CONTINU IS OP X.

GEVAL 2 f IS NIET (NOODZAKELYK) BEGRENSD. BEKYK $b: F \to [-1,1]$ GEGEVEN DOOR $b(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \arctan f(x)$

ER IS EEN UITBREIDING $d: X \to [-1,1]$ VAN b

DE VERZAMELING $H = \{x : |d(x)| = 1\}$ IS GESLOTEN

NEEM $e: X \to [0,1]$ CONTINU MET $e(x) = 1$ $(x \in F)$ EN $e(x) = 0$ $(x \in H)$

DAN IS $h = d \cdot e$ CONTINU EN EEN UITBREIDING VAN b ZÓ DAT $|h(x)| < 1$ VOOR ALLE x.

DAN IS g, GEDEFINIEERD DOOR

$$g(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot h(x)\right)$$

EEN CONTINUE UITBREIDING VAN f.

OPGAVE

ZY X EEN T_4-RUIMTE, $F \subseteq X$ GESLOTEN EN $f: F \to S^1$ CONTINU

BEWYS: ER ZYN EEN OMGEVING U VAN F EN EEN CONTINUE UITBREIDING $g: U \to S^1$ VAN f.

Compactheid en convergentie

Een ruimte $(X, \mathcal{T})$ is compact als elke open overdekking een eindige deeloverdekking heeft:

. Als $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ en $X = \bigcup \mathcal{U}$ dan is er een eindige $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ zo dat $\bigcup \mathcal{U}' = X$.

Veel boeken/artikelen voegen stilzwijgend de Hausdorff-eigenschap toe.
De reden is dat compacte Hausdorff-ruimten zich heel goed gedragen.

Definitie: Als $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte is en $A \subseteq X$ dan is $\mathcal{T}\restriction A = \{O \cap A : O \in \mathcal{T}\}$ een topologie op A. de <u>deelruimtetopologie</u>

In veel gevallen is onze ruimte een <u>deelruimte</u> van een andere.
Daarom

Opgave
Stel $(X, \mathcal{T})$ is een ruimte en $(A, \mathcal{T}\restriction A)$ een deelruimte: dan geldt
$(A, \mathcal{T}\restriction A)$ is compact desda voor elke familie $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$ met $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}$ is er een eindige deelfamilie $\mathcal{U}'$ van $\mathcal{U}$ met $A \subseteq \bigcup \mathcal{U}'$.

Opgave
Een compacte deelruimte van een Hausdorffruimte is <u>gesloten</u>.

BELANGRYKE EIGENSCHAP

DE RUIMTE $(X,\mathcal{T})$ IS COMPACT D.E.S.D.A VOOR ELKE FAMILIE $\mathcal{F}$ VAN GESLOTEN VERZAMELINGEN MET DE EIGENSCHAP DAT $\bigcap \mathcal{F}' \neq \emptyset$ VOOR ELKE EINDIGE $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ GELDT $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

EEN GESLOTEN DEELRUIMTE VAN EEN COMPACTE RUIMTE IS COMPACT.

ALS $f: X \to Y$ CONTINU IS EN X IS COMPACT DAN IS $f[X]$ COMPACT.

STELLING

ELKE COMPACTE HAUSDORFFRUIMTE $(X,\mathcal{T})$ IS NORMAAL

① REGULIER

NEEM $x \in X$ EN O OPEN MET $x \in O$

WE WILLEN EEN OPEN U MET $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq O$.

GEBRUIK NU: $\{x\} = \bigcap \{\overline{U} : U \text{ open}, x \in U\}$

DUS $\bigcap \{\overline{U} \cap (X \setminus O) : U \text{ open}, x \in U\} = \emptyset$

COMPACTHEID: ER ZIJN $U_1, U_2, \ldots, U_n$ ZO DAT

$$\bigcap_{i=1}^{m} (\overline{U_i} \cap X \setminus O) = \emptyset$$

NEEM $U = \bigcap_{i=1}^{m} U_i$

DAN $\overline{U} \cap X \setminus O \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} (U_i \cap X \setminus O) = \emptyset$ EN $x \in U$

DUS $x \in U \subseteq \overline{U} \subseteq O$.

② NEEM F EN G GESLOTEN EN DISJUNCT

VOOR ELKE $x \in F$ IS ER EEN OPEN U_x MET $x \in U_x \subseteq \overline{U}_x \subseteq X \setminus G$.

DUS $\mathcal{O} = \{O : O \cap F \neq \emptyset, \overline{O} \cap G = \emptyset\}$ OVERDEKT F

NEEM EEN EINDIGE DEELOVERDEKKING $\mathcal{O}'$

DUS $F \subseteq \bigcup \mathcal{O}'$ MAAR OOK

$$\overline{\bigcup \mathcal{O}'} = \bigcup \{\overline{O} : O \in \mathcal{O}'\} \subseteq X \setminus G$$

NEEM $U = \bigcup \mathcal{O}'$ $V = X \setminus \overline{\bigcup \mathcal{O}'}$

DAN $F \subseteq U$, $G \subseteq V$ EN $U \cap V = \emptyset$

CONVERGENTIE: FILTERS

EEN FILTER OP EEN VERZAMELING X ($\neq \emptyset$) IS EEN NIET-LEGE FAMILIE $\mathcal{F}$ DEELVERZAMELINGEN VAN X MET

- $\emptyset \notin \mathcal{F}$
- ALS $F, G \in \mathcal{F}$ DAN $F \cap G \in \mathcal{F}$
- ALS $F \in \mathcal{F}$ EN $F \subseteq G$ DAN $G \in \mathcal{F}$.

VOORBEELDEN

- $\{X\}$
- VOOR EEN $x \in X$ IS $\mathcal{F}_x = \{F \subseteq X : x \in F\}$ EEN FILTER
- ALGEMEEN ALS $A \neq \emptyset$ DAN IS $\mathcal{F}_A = \{F \subseteq X : A \subseteq F\}$ EEN FILTER
- ALS X ONEINDIG IS DAN IS $\mathcal{F} = \{F \subseteq X : X \setminus F \text{ IS EINDIG}\}$ EEN FILTER, HET FRÉCHET-FILTER
- OP $\mathbb{R}$ IS $\{F \subseteq \mathbb{R} : \mu^*(\mathbb{R} \setminus F) < \infty\}$ EEN FILTER.
- OP $\mathbb{N}$: $\mathcal{I}_{\frac{1}{n}} = \{I \subseteq \mathbb{N} : \sum_{n \in I} \frac{1}{n} < \infty\}$
  $\mathcal{F}_{\frac{1}{n}} = \{\mathbb{N} \setminus I : I \in \mathcal{I}\}$ IS EEN FILTER

IN EEN TOPOLOGISCHE RUIMTE $(X, \mathcal{T})$ ALS $x \in X$ DAN IS $\mathcal{U}(x)$, DE FAMILIE OMGEVINGEN VAN x, EEN FILTER.

ZIJ $\mathcal{F}$ EEN FILTER OP EEN TOPOLOGISCHE RUIMTE $(X, \mathcal{T})$ EN $x \in X$

WE ZEGGEN $\mathcal{F}$ CONVERGEERT NAAR x ALS $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$; NOTATIE $\mathcal{F} \longrightarrow x$

NB $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F} \Leftrightarrow (\forall U \in \mathcal{U}(x))(\exists F \in \mathcal{F})(F \subseteq U)$

$\rightarrow$ DUIDELYK $F = U$

$\leftarrow$ OOK DUIDELYK: ALS $F \in \mathcal{F}$ EN $F \subseteq U$ DAN $U \in \mathcal{F}$.

LAAT $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ EEN RY IN X ZYN

DEFINIEER

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq X : (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)(x_n \in F)\}$$

$$(= \{F \subseteq X : (\exists N \in \mathbb{N})(\{x_n : n \geq N\} \subseteq F)\})$$

DAN $x_n \to x$ DESDA $\mathcal{F} \to x$

FILTERCONVERGENTIE DOET ALLES WAT RYTJESCONVERGENTIE VROEGER DEED

- $f : X \to Y$ IS CONTINU IN x DESDA VOOR ELK FILTER $\mathcal{F}$ MET $\mathcal{F} \to x$ GELDT $f(\mathcal{F}) \to f(x)$

  NB $f(\mathcal{F}) = \{G \subseteq Y : (\exists F \in \mathcal{F})(f[F] \subseteq G)\}$

  HET BEELDFILTER

  [VERTAALOEFENING]

- ALS $A \subseteq X$ EN $x \in X$ DAN

  $x \in \overline{A} \Leftrightarrow$ ER IS EEN FILTER $\mathcal{F}$ MET $A \in \mathcal{F}$ EN $\mathcal{F} \to x$.

  $\rightarrow$ NEEM $\mathcal{F} = \{F \subseteq X : (\exists U \in \mathcal{U}(x))(U \cap A \subseteq F)\}$

  $\leftarrow$ ALS $\mathcal{F} \to x$ DAN $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$

  EN ALS OOK $A \in \mathcal{F}$ DAN $U \cap A \neq \emptyset$ ALS $U \in \mathcal{U}(x)$.

FILTERS VERGELYKEN:

ALS $\mathcal{F}$ EN $\mathcal{G}$ FILTERS ZYN

EN $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$

DAN HEET $\mathcal{G}$ FYNER DAN $\mathcal{F}$

EN $\mathcal{F}$ GROVER DAN $\mathcal{G}$.

STELLING

$(X, \mathcal{T})$ IS COMPACT $\Leftrightarrow$ VOOR ELK FILTER $\mathcal{F}$ IS ER EEN FIJNER FILTER DAT CONVERGEERT

$\rightarrow$ MERK OP: ALS $\mathcal{F}$ EEN FILTER IS DAN GELDT $\bigcap \{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\} \neq \emptyset$

WANT ALS $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$ DAN $\overline{F_1} \cap \ldots \cap \overline{F_n} \supseteq F_1 \cap \ldots \cap F_n \neq \emptyset$

NEEM $x \in \bigcap \{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\}$

EN DEFINIEER $\mathcal{G} = \{G \subseteq X : (\exists U \in \mathcal{U}(x))(\exists F \in \mathcal{F})(U \cap F \subseteq G)\}$

- $\mathcal{G}$ IS EEN FILTER
- $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ — $X \in \mathcal{U}(x)$ EN $F = X \cap F$
- $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$ — $X \in \mathcal{F}$ EN $U = U \cap X$

$\leftarrow$ STEL $\mathcal{F}$ IS EEN FAMILIE GESLOTEN VERZAMELINGEN ZÓ DAT $F_1 \cap \ldots \cap F_n \neq \emptyset$ ALS $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$.

DEFINIEER

$$\mathcal{G} = \{G : (\exists F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F})(\bigcap_{i=1}^{n} F_i \subseteq G)\}$$

- $\mathcal{G}$ IS EEN FILTER
- $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$
- STEL $\mathcal{H}$ IS EEN FILTER ZÓ DAT $\mathcal{H} \supseteq \mathcal{G}$ EN $\mathcal{H} \rightarrow x$ VOOR EEN x.
- DAN GELDT $U \cap G \neq \emptyset$ VOOR <u>ALLE</u> $U \in \mathcal{U}(x)$ EN $G \in \mathcal{G}$

  EN DUS $x \in \bigcap \{\overline{G} : G \in \mathcal{G}\}$

  MAAR $\bigcap \{\overline{G} : G \in \mathcal{G}\} \subseteq \bigcap \mathcal{F}$
- DUS $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.