STELLING: $(X, \mathcal{T})$ IS COMPACT D.E.S.DA
ELK ULTRAFILTER CONVERGEERT.

- $\rightarrow$: ALS $\mathcal{U}$ EEN ULTRAFILTER IS DAN IS ER EEN FYNER FILTER $\mathcal{V}$ DAT CONVERGEERT MAAR $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ WANT $\mathcal{U}$ IS ULTRA
- $\leftarrow$: ALS $\mathcal{F}$ EEN FILTER IS DAN IS ER EEN ULTRAFILTER $\mathcal{U}$ MET $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$ DAT ULTRAFILTER CONVERGEERT. KLAAR.

TERZYDE: EEN ULTRAFILTER IS, PER DEFINITIE, EEN FILTER $\mathcal{U}$ MET DE EIGENSCHAP DAT ER GEEN ECHT FYNER FILTER IS.
OOK WEL: EEN MAXIMAAL FILTER
HET BESTAAN VAN ULTRAFILTERS BEWYST MEN MET BEHULP VAN HET LEMMA VAN ZORN - EEN EQUIVALENT VAN HET KEUZEAXIOMA.
ZIE HET VU-DICTAAT VOOR MEER INFORMATIE.
ZIE OOK DE CURSUS AM3520 LOGIC.

DE GROTE KRACHT VAN COMPACTHEID VINDEN WE IN PRODUCTEN VAN TOPOLOGISCHE RUIMTEN.

LAAT $(X, \mathcal{T})$ EN $(Y, \mathcal{O})$ TWEE TOPOLOGISCHE RUIMTEN ZYN
DE PRODUCTTOPOLOGIE OP $X \times Y$ IS DE TOPOLOGIE DIE DE FAMILIE OPEN RECHTHOEKEN
$$\{T \times O : T \in \mathcal{T}, O \in \mathcal{O}\}$$
ALS BASIS HEEFT.
OF: DE FAMILIE $\{T \times Y : T \in \mathcal{T}\} \cup \{X \times O : O \in \mathcal{O}\}$ ALS SUBBASIS.

DE PRODUCTTOPOLOGIE HEEFT DE VOLGENDE BELANGRYKE/NUTTIGE EIGENSCHAPPEN

- $\pi_X : X \times Y \to X$ EN $\pi_Y : X \times Y \to Y$ ZYN BEIDE CONTINU
- ALS Z EEN TOPOLOGISCHE RUIMTE IS EN $f : Z \to X \times Y$ DAN GELDT: f IS CONTINU D.E.S.D.A $\pi_X \circ f$ EN $\pi_Y \circ f$ ZYN CONTINU.

  "$\to$" DUIDELYK SAMENSTELLINGEN VAN CONTINUE FUNCTIES ZYN CONTINU.

  "$\leftarrow$" WE HOEVEN SLECHTS(!) TE BEWYZEN DAT VOOR $T \in \mathcal{T}$ EN $O \in \mathcal{O}$ DE VOLLEDIGE ORIGINELEN

  $$f^{-1}[T \times Y] \quad \text{EN} \quad f^{-1}[X \times O]$$

  OPEN ZYN

  WELNU $f^{-1}[T \times Y] = f^{-1}[\pi_X^{-1}[T]]$
  $= (\pi_X \circ f)^{-1}[T]$

  EN $f^{-1}[X \times O] = (\pi_Y \circ f)^{-1}[O]$.

- ALS $\mathcal{F}$ EEN FILTER OP $X \times Y$ IS DAN GELDT $\mathcal{F} \to (x,y)$ DESDA $\pi_X(\mathcal{F}) \to x$ EN $\pi_Y(\mathcal{F}) \to y$

  $\to$: π_X EN π_Y ZYN CONTINU

  $\leftarrow$: STEL U IS EEN OMGEVING VAN (x,y)
  NEEM $T \in \mathcal{T}$ EN $O \in \mathcal{O}$ MET
  $(x,y) \in T \times O \subseteq U$
  DAN $x \in T$ DUS $T \in \pi_X(\mathcal{F})$
  EN DUS $\pi_X^{-1}[T] \in \mathcal{F}$, DWZ $T \times Y \in \mathcal{F}$
  IDEM $X \times O \in \mathcal{F}$
  EN DUS $T \times O = (T \times Y) \cap (X \times O) \in \mathcal{F}$

- $X \times Y$ IS COMPACT DESDA X EN Y ZYN COMPACT

  $\to$: π_X EN π_Y ZYN CONTINU

  $\leftarrow$: STEL $\mathcal{U}$ IS EEN OPEN OVERDEKKING VAN $X \times Y$.

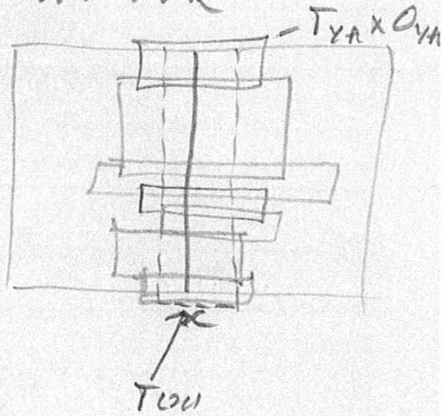
STAP 1: NEEM $x \in X$ VAST

VOOR ELKE $y \in Y$ IS ER EEN $U_y \in \mathcal{U}$
MET $(x,y) \in U_y$; DAARBIJ VINDEN WE
$T_y \in \mathcal{T}$ EN $O_y \in \mathcal{O}$ MET

$$(x,y) \in T_y \times O_y \subseteq U_y.$$

Y IS COMPACT DUS ER ZIJN $y_1, \dots, y_k$
MET $Y = \bigcup_{i=1}^{k} O_{y_i}$
NEEM $T(x) = \bigcap_{i=1}^{k} T_{y_i}$
DAN GELDT DAT

$$T(x) \times Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} T_{y_i} \times O_{y_i} \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} U_{y_i}$$



DUS ER IS EEN EINDIGE
DEELFAMILIE $\mathcal{U}_x$ VAN $\mathcal{U}$
ZÓ DAT $T(x) \times Y \subseteq \bigcup \mathcal{U}_x$

STAP 2 $\{T(x) : x \in X\}$ IS EEN OPEN OVERDEKKING
VAN X. ER ZIJN $x_1, \dots, x_m$
ZÓ DAT $X = \bigcup_{i=1}^{m} T(x_i)$
MAAR DAN

$$X \times Y = \bigcup_{i=1}^{m} (T(x_i) \times Y) \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \bigcup \mathcal{U}_{x_i} = \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{U}_{x_i} \right)$$

DUS $\bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{U}_{x_i}$ IS EEN EINDIGE DEEL-
OVERDEKKING VAN $\mathcal{U}$.

- ALS Y COMPACT IS DAN IS
  $\pi_X : X \times Y \to X$
  EEN GESLOTEN AFBEELDING
  ZIE HET BEWIJS HIERBOVEN.
- $X \times Y$ IS T_0, T_1, T_2, T_3 DESDA X EN Y ZIJN T_0, T_1, T_2, T_3.
- ECHTER: $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ IS <u>NIET</u> NORMAAL.