KEUZEAXIOMA, WELORDENINGSSTELLING EN HET LEMMA VAN ZORN.

DRIE BELANGRYKE UITSPRAKEN UIT DE WISKUNDE

DEFINITIE: LAAT $\{X_i : i \in I\}$ EEN FAMILIE VERZAMELINGEN ZYN, DAN IS HUN <u>CARTESISCH PRODUCT</u> ALS VOLGT GEDEFINIEERD

$$\prod_{i \in I} X_i$$

IS DE VERZAMELING FUNCTIES, f, MET $\operatorname{dom} f = I$ EN $f(i) \in X_i$ VOOR ALLE i.

BYVOORBEELD

- $\prod_{n \in \mathbb{N}} [0, n]$
  BESTAAT UIT ALLE RYEN $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ VAN REËLE GETALLEN MET $0 \le x_n \le n$ (ALLE n)
- $\prod_{x \in \mathbb{R}} (0, e^x)$
  BESTAAT UIT ALLE FUNCTIES $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ DIE VOLDOEN AAN $0 < f(x) < e^x$ $(x \in \mathbb{R})$
- $\prod \{X : X \subseteq \mathbb{R}$ EN $X \neq \emptyset\}$
  BESTAAT UIT ALLE FUNCTIES $f : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{R}$ DIE VOLDOEN AAN $f(X) \in X$ VOOR ELKE X.

- HET KEUZEAXIOMA ZEGT:
  ALS $X_i \neq \emptyset$ VOOR ALLE i
  DAN $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$.

WELORDENINGEN:

ZIJ X EEN VERZAMELING

EEN RELATIE $\prec$ IS EEN WEL-ORDENING

ALS
- VOOR ALLE $x \in X$: $x \not\prec x$
- ALS $x, y \in X$ DAN $x = y$ OF $x \prec y$ OF $y \prec x$
- ALS $x, y, z \in X$ DAN GELDT
  ALS $x \prec y$ EN $y \prec z$ DAN $x \prec z$
- ALS $A \subseteq X$ NIET LEEG IS DAN
  IS ER EEN $a \in A$ ZÓ DAT
  VOOR ALLE $b \in A$ GELDT $a = b$ OF $a \prec b$.

VOORBEELD: DE GEWONE ORDENING OP $\mathbb{N}$

- DEFINIEER $\prec$ OP $\mathbb{N}$ DOOR
  $m \prec n$ ALS
  - m EN n ZIJN EVEN EN $m < n$
  - m EN n ZIJN ONEVEN EN $m < n$
  - m IS EVEN EN n IS ONEVEN
- OP $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
  $(k, l) \prec (m, n)$ ALS $k < m$ OF
  $k = m$ EN $l < n$

  (LEXICOGRAFISCHE ORDE)
- DE GEWONE ORDE OP $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ OF $\mathbb{R}$
  IS <u>GEEN</u> WEL-ORDENING.

WELORDENINGSSTELLING:
ELKE VERZAMELING HEEFT
EEN WELORDENING.

WAAROM ZOU JE DAT WILLEN?
OM INDUCTIE EN RECURSIE TE
KUNNEN DOEN.

Het Lemma van Zorn
(Dit is de lastigste)

Een partiële ordening op een verzameling X
is een relatie $\leq$ die voldoet aan
- $x \leq x$
- $x \leq y$ en $y \leq x \rightarrow y = x$
- $x \leq y$ en $y \leq z \rightarrow x \leq z$

Voorbeelden
- De relatie $\subseteq$ is een partiële ordening op elke familie verzamelingen
- De delingsrelatie op $\mathbb{N}$:
  $m \mid n$ desda er is een $k \in \mathbb{N}$ met $m \cdot k = n$.
- op $C([0,1])$: $f \leq g$ betekent $f(t) \leq g(t)$ voor alle t.

Een partieel geordende verzameling is <u>inductief</u> als elke keten een bovengrens heeft:
- Voorbeeld
  $\mathbb{F}$ is de familie filters op een verzameling X.
  Stel $\mathbb{G}$ is een keten van filters
  dwz als $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbb{G}$ dan $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ of $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$
  dan is $\bigcup \mathbb{G}$ een filter en dus een bovengrens voor $\mathbb{G}$.
  - $\emptyset \notin \bigcup \mathbb{G}$ want $\emptyset \notin \mathcal{F}$ voor alle $\mathcal{F} \in \mathbb{G}$
  - als $A, B \in \bigcup \mathbb{G}$ dan zijn er $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbb{G}$ met $A \in \mathcal{F}$ en $B \in \mathcal{G}$
    maar $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ en dus $A \cap B \in \mathcal{G} \subseteq \bigcup \mathbb{G}$
    of $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ en dus $A \cap B \in \mathcal{F} \subseteq \bigcup \mathbb{G}$
  - als $F \in \bigcup \mathbb{G}$ en $F \subseteq G$ dan $G \in \bigcup \mathbb{G}$
    als $F \in \mathcal{F} \in \mathbb{G}$ dan $G \in \mathcal{F} \subseteq \bigcup \mathbb{G}$

HET LEMMA VAN ZORN

ALS $(X, \leq)$ EEN INDUCTIEVE PARTIEEL GEORDENDE VERZAMELING IS DAN HEEFT DEZE MAXIMALE ELEMENTEN

x IS <u>MAXIMAAL</u> ALS UIT $x \leq y$ VOLGT DAT $x = y$.

HET LEMMA VAN ZORN IMPLICEERT DUS DE ULTRAFILTERSTELLING:

ELK FILTER ZIT IN EEN MAXIMAAL FILTER.

STELLING: DE DRIE UITSPRAKEN ZYN EQUIVALENT (IN DE ZIN DAT ELK REDELYK MAKKELYK UIT DE ANDEREN IS AF TE LEIDEN).

MOEILYKE STELLING:

HET KEUZEAXIOMA IS NIET TE BEWYZEN UIT DE ANDERE AXIOMA'S VAN DE VERZAMELINGENLEER

HET IS EEN EXTRA <u>AXIOMA</u>

VEEL MOOIE GEVOLGEN

- ULTRAFILTERSTELLING
- STELLING VAN TYCHONOFF OVER PRODUCTEN VAN COMPACTE RUIMTEN
- ELKE VECTORRUIMTE HEEFT EEN BASIS
- CONTINU = RYTJESCONTINU

⋮