1 ALS X EN Y COMPACT ZYN DAN IS HET PRODUCT $X \times Y$ OOK COMPACT

2 ALS X COMPACT IS DAN IS VOOR ELKE RUIMTE Y DE PROJECTIE $\pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ GESLOTEN

STEL $F \subseteq X \times Y$ IS GESLOTEN EN $y \in Y \setminus \pi_Y[F]$

DUS $X \times \{y\} \cap F = \emptyset$

NEEM VOOR ELKE $x \in X$ U_x EN V_x OPEN ZÓ DAT $(x,y) \in U_x \times V_x$ EN $U_x \times V_x \cap F = \emptyset$

NEEM EINDIG VEEL $x_1, \dots, x_m$ ZÓ DAT $X = U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_m}$

EN DEFINIEER $V = V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_m}$

NU GELDT $X \times \{y\} \subseteq X \times V \subseteq (U_{x_1} \times V_{x_1}) \cup \dots \cup (U_{x_m} \times V_{x_m})$

DUS $X \times V \cap F = \emptyset$

EN DUS $V \cap \pi_Y[F] = \emptyset$.

3 ALS X NIET COMPACT IS DAN IS ER EEN RUIMTE Y ZÓ DAT $\pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ NIET GESLOTEN IS

STEL $\mathcal{F}$ IS EEN FILTER ZONDER FYNER FILTER DAT CONVERGEERT.

DAN GELDT $\bigcap \{\overline{F} : F \in \mathcal{F}\} = \emptyset$ [ZIE BEWYS]

MAAK EEN RUIMTE Y ALS VOLGT

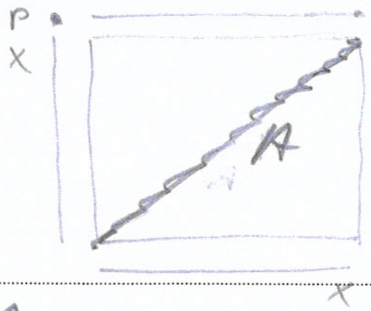
- $Y = X \cup \{p\}$ p EEN PUNT NIET IN X
- ELKE $\{x\}$ MET $x \in X$ IS OPEN.
- LOKALE BASIS VOOR p:

  $\{\{p\} \cup F : F \in \mathcal{F}\}$

MERK OP: IN Y GELDT:

$\overline{F} = F \cup \{p\}$

VOOR ALLE $F \in \mathcal{F}$.



In $X \times Y$ <u>nemen we</u> $A = \{(x,x) : x \in X\}$

Dus A is gesloten.

1 $p \notin \pi_Y[A]$

ofwel $X \times \{p\} \cap A = \emptyset$.

Laat $x \in X$.

Omdat $\bigcap\{F : F \in \mathcal{F}\} = \emptyset$

is er een $F \in \mathcal{F}$ met $x \notin F$

Neem $O = X \setminus F$ als omgeving van x

en $F \cup \{p\}$ als omgeving van p

dan $(x,p) \in O \times (F \cup \{p\})$

en $O \times (F \cup \{p\}) \cap \{(x,x) : x \in X\} = \emptyset$

dus $(x,p) \notin A$.

2 $p \in \pi_Y[A]$

Neem $F \in \mathcal{F}$ willekeurig

dan geldt

$F \cap \pi_Y[A] \neq \emptyset$

want $(X \times F) \cap \{(x,x) : x \in X\} = \{(x,x) : x \in F\} \neq \emptyset$

dwz als $x \in F$ dan $(x,x) \in A$

en $\pi_Y(x,x) = x \in \pi_Y[A] \cap F$.

Dus X is compact d.e.s.d.a.

voor <u>elke</u> ruimte Y is de projectie $\pi_Y : X \times Y \to Y$ een gesloten afbeelding.

Opgave

Stel $A \subseteq X$ en $B \subseteq Y$ zijn compact en laat O open zijn in $X \times Y$ zó dat $A \times B \subseteq O$.

Producten en de Stelling van Tychonoff.

Zij $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ een familie topologische ruimten. We maken een topologie op het Cartesisch product $\prod_{i \in I} X_i$.

We willen dezelfde dingen als bij het product van twee ruimten.

- elke projectie $\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j$ continu
- $f : Z \to \prod_{i \in I} X_i$ is continu desda voor elke i is $\pi_i \circ f$ continu.

Antwoord:

Neem $\mathcal{S}$ als subbasis, waarbij $\mathcal{S}$ de familie van alle open stroken is:

$$\mathcal{S} = \{\pi_i^{-1}[O] : O \in \mathcal{T}_i ; i \in I\}$$

De bijbehorende basis, $\mathcal{B}$, bestaat uit alle eindige open blokken:

$$B = \prod_{i \in I} O_i \text{ met } O_i \in \mathcal{T}_i \text{ voor alle } i$$
én $\{i : O_i \neq X_i\}$ is eindig.

- Dankzij $\mathcal{S}$ bereiken we beide doelen in één keer
  - Voor elke i bevat $\mathcal{S}$ alle verzamelingen $\pi_i^{-1}[O]$ met $O \in \mathcal{T}_i$ dus π_i is continu
  - Als $f : Z \to \prod_{i \in I} X_i$ zó is dat elke samenstelling $\pi_i \circ f$ continu is dan is f continu: voor elke $S \in \mathcal{S}$ is $f^{-1}[S]$ open, want $f^{-1}[\pi_i^{-1}[O]] = (\pi_i \circ f)^{-1}[O]$.

STELLING:

HET PRODUCT $\prod_{i\in I} X_i$ IS EEN
T_0-RUIMTE, T_1-RUIMTE, T_2-RUIMTE T_3-RUIMTE
DAN EN SLECHTS DAN ALS ELKE X_i DAT IS

"$\Leftarrow$": STEL $(x_i)_i \neq (y_i)_i$
DAN IS ER (TEN MINSTE) EEN i_0
ZÓ DAT $x_{i_0} \neq y_{i_0}$
ALS $x_{i_0} \in O$ DAN $(x_i)_i \in \pi_{i_0}^{-1}[O]$
IDEM VOOR y_{i_0} EN $(y_i)_i$

T_0, T_1: ALS $x_{i_0} \in O$ EN $y_{i_0} \notin O$
DAN $(x_i)_i \in \pi_{i_0}^{-1}[O] \not\ni (y_i)_i$

T_2 ALS $x_{i_0} \in U$ EN $y_{i_0} \in V$
EN $U \cap V = \varnothing$
DAN $(x_i)_i \in \pi_{i_0}^{-1}[U]$, $(y_i)_i \in \pi_{i_0}^{-1}[V]$
EN $\pi_{i_0}^{-1}[U] \cap \pi_{i_0}^{-1}[V] = \varnothing$

T_3 STEL $(x_i)_i \in O$
NEEM EEN EINDIG OPEN BLOK
$\prod_{i\in I} O_i$ MET $(x_i)_i \in \prod_i O_i \subseteq O$
ZEG MET $\{i : O_i \neq X_i\} = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$
IN X_{i_j} NEMEN WE U_{i_j} OPEN
MET $x_{i_j} \in U_{i_j} \subseteq \overline{U_{i_j}} \subseteq O_{i_j}$ $(j=1,\ldots,n)$
VOOR ALLE ANDERE i ZET $U_i = X_i$
DAN $(x_i)_i \in \prod_{i\in I} U_i$

$$
\begin{aligned}
\text{EN } \overline{\prod_{i\in I} U_i} &= \overline{\bigcap_{j=1}^{n} \pi_{i_j}^{-1}[U_{i_j}]} \\
&\subseteq \bigcap_{j=1}^{n} \overline{\pi_{i_j}^{-1}[U_{i_j}]} \\
&\subseteq \bigcap_{j=1}^{n} \pi_{i_j}^{-1}[\overline{U_{i_j}}] \\
&\subseteq \bigcap_{j=1}^{n} \pi_{i_j}^{-1}[O_{i_j}] \\
&= \prod_{i\in I} O_i \subseteq O.
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ KIES EEN PUNT $(p_i)_i \in \prod_{i\in I} X_i$ VAST

LAAT $j \in I$ EN NEEM $x \neq y$ IN X_j

IN $\prod_{i\in I} X_i$ MAKEN WE p_x EN p_y UIT $(p_i)_i$
DOOR p_j TE VERVANGEN DOOR
RESPECTIEVELIJK x EN y

DUS $p_x \neq p_y$ MAAR $(p_x)_i = p_i = (p_y)_i$ $i \neq j$

- ALS $\prod_{i\in I} O_i$ EEN EINDIG OPEN BLOK IS MET $p_x \in \prod_{i\in I} O_i \not\ni p_y$
  DAN MOET WEL $x \in O_j \not\ni y$
  DIT ZORGT VOOR T_0 EN T_1
- ALS $p_x \in \prod_{i\in I} U_i$ EN $p_y \in \prod_{i\in I} V_i$
  DAN $p_i \in U_i \cap V_i$ ALS $i \neq j$
  DUS ALS $\prod_i U_i \cap \prod_i V_i = \emptyset$
  DAN MOET $U_j \cap V_j = \emptyset$
  DIT ZORGT VOOR T_2
- ALS $x \in X_j$ EN $U \subset X_j$ IS OPEN MET $x \in U$
  DAN $p_x \in \pi_j^{-1}[U]$
  NEEM EEN EINDIG OPEN BLOK $\prod_{i\in I} O_i$
  MET $p_x \in \prod_{i\in I} O_i \subset \overline{\prod_{i\in I} O_i} \subset \pi_j^{-1}[U]$
  GA NU ZELF NA DAT $\overline{O_j} \subset U$ IN X_j.
  DIT ZORGT VOOR T_3

WE WETEN: T_4 GAAT AL MIS BIJ TWEE FACTOREN.

$\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ IS NIET NORMAAL.

STELLING VAN TYCHONOFF

$\prod_{i \in I} X_i$ IS COMPACT DESDA ELKE X_i IS COMPACT.

$\rightarrow$ DUIDELYK ELKE π_i IS CONTINU

$\leftarrow$ ZY $\mathcal{U}$ EEN ULTRAFILTER OP $\prod_{i \in I} X_i$
VOOR ELKE i IS $\pi_i(\mathcal{U})$ EEN ULTRAFILTER
OP X_i [OPGAVE]
DUS $\pi_i(\mathcal{U})$ CONVERGEERT IN X_i
KEUZEAXIOMA: KIES $(x_i)_i \in \prod_{i \in I} X_i$
ZŌ DAT $\pi_i(\mathcal{U}) \longrightarrow x_i$ VOOR ALLE i
DAN CONVERGEERT $\mathcal{U}$ NAAR $(x_i)_i$

WAAROM KIEZEN?
STELLING EEN RUIMTE X IS HAUSDORFF
DESDA ELK CONVERGENT FILTER
PRECIES ÉÉN LIMIET HEEFT.
[OPGAVE].
DE $\pi_i(\mathcal{U})$ KUNNEN DUS NAAR MEER
DAN ÉÉN PUNT CONVERGEREN.

DUS: DE STELLING VAN TYCHONOFF VOOR
HAUSDORFF-RUIMTEN VOLGT UIT DE
ULTRAFILTERSTELLING.

DE ALGEMENE STELLING VAN TYCHONOFF
IMPLICEERT HET KEUZEAXIOMA.