COMPACTHEID IN FUNCTIERUIMTEN

PROBLEEM: X EEN TOPOLOGISCHE RUIMTE
$C(X,\mathbb{R})$ DE VECTORRUIMTE VAN BEGRENSDE CONTINUE FUNCTIES VAN X NAAR $\mathbb{R}$
MET DE UNIFORME NORM.
$\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$

KARAKTERISEER COMPACTHEID VAN DEELVERZAMELINGEN VAN $C(X,\mathbb{R})$

Opmerkingen vooraf. STEL $K \subset C(X,\mathbb{R})$ IS COMPACT

- VOOR ELKE $x \in X$ IS $f \mapsto f(x)$ CONTINU
  DUS VOOR ELKE x IS $\{f(x) : f \in K\}$ COMPACT
- K IS EEN DEELVERZAMELING VAN $\mathbb{R}^X$
  EN HEEFT DUS NOG EEN TOPOLOGIE:
  DE PRODUCTTOPOLOGIE $\mathcal{T}_p$
- DE AFBEELDING
  $$\mathrm{ID} : (K, \|\cdot\|) \longrightarrow (K, \mathcal{T}_p)$$
  IS CONTINU
- $\mathcal{T}_p$ IS EEN HAUSDORFF TOPOLOGIE
  EN COMPACT WEGENS CONTINUÏTEIT VAN ID.
- ID IS OOK GESLOTEN:
  ALS $F \subset K$ GESLOTEN IS T.O.V. $\|.\|$
  DAN IS F COMPACT TOV $\|.\|$
  EN DUS COMPACT TOV $\mathcal{T}_p$
  EN DUS GESLOTEN TOV $\mathcal{T}_p$
  (WEGENS HET T_2 ZIJN VAN $\mathcal{T}_p$).

DUS DE COMPACTHEID VAN K HEEFT TWEE GEVOLGEN

- VOOR ELKE x IS $\{f(x) : f \in K\}$ COMPACT
- DE NORM-TOPOLOGIE EN DE PRODUCT-TOPOLOGIE ZIJN GELIJK op K.
- K IS GESLOTEN T.O.V. DE PRODUCTTOPOLOGIE

ER GELDT, VOOR WILLEKEURIGE DEELVERZAMELINGEN VAN $\mathbb{R}^X$.

F IS COMPACT DESDA • VOOR ELKE x IS $F(x) = \{f(x) : f \in F\}$ BEGRENSD
EN • F IS GESLOTEN IN $\mathbb{R}^X$.

$\longrightarrow$ HEBBEN WE AL GEZIEN, $F[x]$ IS ZELFS COMPACT

$\longleftarrow$ VOOR ELKE x ZIJ $M_x = \sup\{|f(x)| : f \in F\}$

DAN GELDT $F \subseteq \prod_{x \in X} [-M_x, M_x]$

- HET PRODUCT $\prod_{x \in X} [-M_x, M_x]$ IS COMPACT
- F IS GESLOTEN IN $\mathbb{R}^X$, DUS IN HET PRODUCT, EN DUS COMPACT.

DUS ZOEKEN WE VOORWAARDEN OP K DIE GARANDEREN DAT K GESLOTEN IS IN $\mathbb{R}^X$ TOV $\mathcal{T}_p$ (EN OMGEKEERD!)

BEKIJK DE EVALUATIE FUNCTIE

$$EV : C(X, \mathbb{R}) \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(f, x) \longmapsto f(x)$$

DIE FUNCTIE IS CONTINU.

NEEM $(f, x) \in C(X, \mathbb{R}) \times X$ EN ZIJ $\varepsilon > 0$

- NEEM EEN OPEN VERZAMELING O MET $x \in O$ EN $f[O] \subseteq (f(x) - \varepsilon/3, f(x) + \varepsilon/3)$
(DUS $y \in O \rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon/3$)
- DAN IS $B(f, \varepsilon/3) \times O$ EEN OMGEVING VAN (f, x).
STEL $(g, y) \in B(f, \varepsilon/3) \times O$
DAN GELDT
$$|g(y) - f(x)| \leq |g(y) - f(y)| + |f(y) - f(x)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 < \varepsilon.$$
- ER GELDT IETS MEER: ALS $g \in B(f, \varepsilon/3)$ EN $y \in O$ DAN OOK
$$|g(y) - g(x)| \leq |g(y) - f(y)| + |f(y) - f(x)| + |f(x) - g(x)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Stel nu dat K compact is tov $\|.\|$.

Neem x vast en zij $\varepsilon > 0$

Voor elke $f \in K$ is er dus een omgeving O_f van x (afhankelijk van f)

zo dat

als $\|g - f\| < \varepsilon/3$

dan geldt voor $y \in O_f$ dat $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$.

Omdat K compact is is er een eindige verzameling $F \subseteq K$ zo dat

$K \subseteq \bigcup\{B(f, \varepsilon/3) : f \in F\}$

Laat $O = \bigcap\{O_f : f \in F\}$

dan is O een omgeving van x

en voor elke $g \in K$ geldt nu

als $y \in O$ dan $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$

(neem $f \in F$ met $\|g - f\| < \varepsilon/3$

dan als $y \in O$ dan $y \in O_f$ en

dus $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$)

Dus één omgeving van x werkt voor alle $f \in K$ tegelijk.

We zeggen dat K gelijkmatig continu (of equicontinu) is in x.

Conclusie

Als K compact is dan is K gelijkmatig continu en begrensd

begrensd: $\max\{\|f\| : f \in K\}$ bestaat wegens compactheid

Als X compact Hausdorff is dan geldt het omgekeerde ook.

Stel $K \subseteq C(X, \mathbb{R})$ is begrensd en gelijkmatig continu

- Dan is de afsluiting van K ook gelijkmatig continu.

  Zij $x \in X$ en zij $\varepsilon > 0$

  Neem O open met $x \in O$ en zó dat voor alle $f \in K$ en $y \in O$

  $$|f(y) - f(x)| < \varepsilon/3$$

  Als $g \in \overline{K}$ dan is er een $f \in K$ met $\|g - f\| < \varepsilon/3$

  Dan volgt $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$ voor $y \in O$.

- Neem nu ook aan dat K gesloten is t.o.v. $\|.\|$.

  We bekijken de afsluiting van K t.o.v. $\mathcal{J}_p$

  - Stel $g \in \overline{K}$ t.o.v. $\mathcal{J}_p$

    Zij $x \in X$ en zij $\varepsilon > 0$

    Neem O open met $x \in O$ en zó dat voor alle $f \in K$ en $y \in O$

    $$|f(y) - f(x)| < \varepsilon/3$$

    Zij $y \in O$ en neem $f \in K$ zó dat

    $|g(y) - f(y)| < \varepsilon/3$ en $|g(x) - f(x)| < \varepsilon/3$.

    Maar dan $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$ (als boven)

    Conclusie de afsluiting van K in $\mathcal{J}_p$ bestaat uit continue functies en is ook gelijkmatig continu.

  - We bewijzen dat de topologie van $\|.\|$ en $\mathcal{J}_p$ gelijk zijn op $\overline{K}$

    Dan zijn we klaar:

    - $\overline{K} \subseteq \prod_{x \in X} [-M_x, M_x]$ $\quad (M_x = \sup\{|f(x)| : f \in \overline{K}\})$
    - $\overline{K}$ is compact t.o.v. $\mathcal{J}_p$ en dus t.o.v. $\|.\|$.
    - K is gesloten t.o.v. $\|.\|$ dus gesloten in $\overline{K}$ en dus compact t.o.v. $\|.\|$
    - En achteraf geldt $K = \overline{K}$ t.o.v. $\mathcal{J}_p$

WE WETEN DAT $\mathcal{T}_p$ EEN DEEL IS VAN DE TOPOLOGIE VAN $\|\cdot\|$.

OMGEKEERD

ZIJ $f \in \overline{K}$ EN ZIJ $\varepsilon > 0$

WE ZOEKEN EEN $\mathcal{T}_p$-OMGEVING U VAN f ZÓ DAT $U \cap \overline{K} = B(f, \varepsilon)$

VOOR ELKE $x \in X$ IS ER EEN OPEN VERZAMELING O_x ZÓ DAT VOOR ALLE $g \in \overline{K}$ EN ALLE $y \in O_x$ GELDT

$$|g(y) - g(x)| < \varepsilon/3.$$

WEGENS DE COMPACTHEID VAN X IS ER EEN EINDIGE VERZAMELING $E \subseteq X$ ZÓ DAT $X = \bigcup_{x \in E} O_x$.

NEEM NU DE VOLGENDE BASIS-OPEN VERZAMELING

$$U = \{ h \in \mathbb{R}^X : (\forall x \in E)(|h(x) - f(x)| < \varepsilon/3) \}$$

$$\left(U = \bigcap_{x \in E} (f(x) - \varepsilon/3, f(x) + \varepsilon/3) \right)$$

NEEM $g \in U \cap \overline{K}$ EN $y \in X$

ER IS EEN $x \in E$ MET $y \in O_x$

EN DUS

$$\begin{aligned} |g(y) - f(y)| &\leq |g(y) - g(x)| + |g(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

DUS $\|g - f\| = \max\{|g(y) - f(y)| : y \in X\} < \varepsilon$.