

# COMPACTHEID IN FUNCTIERUIMTEN



PROBLEEM:  $X$  EEN TOPOLOGISCHE RUIMTE  
 $C(X, \mathbb{R})$  DE VECTORRUIMTE VAN  
 BEGRENSEDE CONTINUE FUNCTIES  
 VAN  $X$  NAAR  $\mathbb{R}$   
 MET DE UNIFORME NORM  
 $\|f\| = \sup \{ |f(x)| : x \in X \}$

KARAKTERISEER COMPACTHEID VAN  
 DEELVERZAMELINGEN VAN  $C(X, \mathbb{R})$

OPMERKINGEN VOORAF STEL  $K \in C(X, \mathbb{R})$  IS COMPACT.

- VOOR ELKE  $x \in X$  IS  $f \mapsto f(x)$  CONTINU  
 DUS VOOR ELKE  $x$  IS  $\{f(x) : f \in K\}$  COMPACT
- $K$  IS EEN DEELVERZAMELING VAN  $\mathbb{R}^X$   
 EN HEEFT DUS NOG EEN TOPOLOGIE.  
 DE PRODUCTTOPOLOGIE  $\mathcal{T}_p$
- DE AFBEELDING

$$id: (K, \|\cdot\|) \rightarrow (K, \mathcal{T}_p)$$

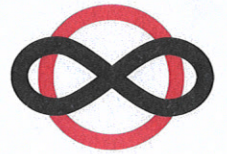
IS CONTINU

- $\mathcal{T}_p$  IS EEN HAUSDORFF TOPOLOGIE  
 EN COMPACT WEGENS CONTINUITÉIT VAN  $id$ .
- $id$  IS OOK GESLOTEN:  
 ALS  $F \in K$  GESLOTEN IS T.O.V.  $\|\cdot\|$   
 DAN IS  $F$  COMPACT T.O.V.  $\|\cdot\|$  EN DUS  
 EN DUS COMPACT T.O.V.  $\mathcal{T}_p$   
 EN DUS GESLOTEN T.O.V.  $\mathcal{T}_p$   
 (WEGENS MET  $\mathcal{T}_2$  ZYN VAN  $\mathcal{T}_p$ ).

DUS DE COMPACTHEID VAN  $K$  HEEFT  
 TWEE GEVOLGEN

- VOOR ELKE  $x$  IS  $\{f(x) : f \in K\}$  COMPACT
- DE NORM-TOPOLOGIE EN DE PRODUCT-  
 TOPOLOGIE ZYN GELIJK OP  $K$ .
- $K$  IS GESLOTEN T.O.V. DE PRODUCTTOPOLOGIE

ER GELDT, VOOR WILLEKEURIGE  
DEELVERZAMELINGEN VAN  $\mathbb{R}^X$ .



$F$  IS COMPACT DESOM: VOOR ELKE  $x$  IS  
 $F(x) = \{f(x) : f \in F\}$  BEGRENSD  
 EN:  $F$  IS GESLOTEN IN  $\mathbb{R}^X$ .

→ HEBBEN WE AL GEZIEEN,  $F(x)$  IS ZELFS COMPACT

← VOOR ELKE  $x$  ZIJ  $M_x = \sup\{|f(x)| : f \in F\}$   
 DAN GELDT  $F \subseteq \prod_{x \in X} [-M_x, M_x]$

• HET PRODUCT  $\prod_{x \in X} [-M_x, M_x]$  IS COMPACT

•  $F$  IS GESLOTEN IN  $\mathbb{R}^X$ , DUS IN HET  
 PRODUCT, EN DUS COMPACT.

DUS ZOEKEN WE VOORWAARDEN OP  $K$   
 DIE GARANDEREN DAT  $K$  GESLOTEN  
 IS IN  $\mathbb{R}^X$  TOV  $\mathcal{I}_p$  (EN OMGEKEERD!)

BEKIJK DE EVALUATIE FUNCTIE

$$EV: C(X, \mathbb{R}) \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(f, x) \mapsto f(x)$$

DE FUNCTIE IS CONTINU.

NEEM  $(f, x) \in C(X, \mathbb{R}) \times X$  EN ZIJ  $\varepsilon > 0$

• NEEM EEN OPEN VERZAMELING  $O$

MET  $x \in O$  EN  $f(O) \subseteq (f(x) - \varepsilon/3, f(x) + \varepsilon/3)$

(DUS  $y \in O \rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon/3$ )

• DAN IS  $B(f, \varepsilon/3) \times O$  EEN OMGEVING  
 VAN  $(f, x)$ .

STEL  $(g, y) \in B(f, \varepsilon/3) \times O$

DAN GELDT

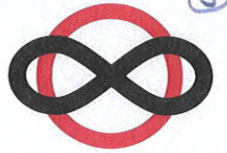
$$\begin{aligned} |g(y) - f(x)| &\leq |g(y) - f(y)| + |f(y) - f(x)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

• ER GELDT NIETS MEER: ALS  $g \in B(f, \varepsilon/3)$

EN  $y \in O$  DAN OK

$$\begin{aligned} |g(y) - g(x)| &\leq |g(y) - f(y)| + |f(y) - f(x)| + |f(x) - g(x)| \\ &< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

STEL NU DAT  $K$  COMPACT IS TOV 11.11.



NEEM  $x$  VAST EN  $\varepsilon > 0$

VOOR ELKE  $f \in K$  IS ER DUS EEN OMGEVING  $O_f$   
VAN  $x$  CARMAKKELYK VAN  $f$ ,

ZO DAT

$$\text{ALS } \|g - f\| < \varepsilon/3$$

$$\text{DAN GELDT VOOR } y \in O_f \text{ DAT } |g(y) - f(y)| < \varepsilon.$$

OMDAT  $K$  COMPACT IS IS ER EEN

EINDIGE VERZAMELING  $F \subseteq K$  ZO DAT

$$K \subseteq \bigcup \{B(f, \varepsilon/3) : f \in F\}$$

$$\text{LAAT } O = \bigcap \{O_f : f \in F\}$$

DAN IS  $O$  EEN OMGEVING VAN  $x$

EN VOOR ELKE  $g \in K$  GELDT NA

$$\text{ALS } y \in O \text{ DAN } |g(y) - f(y)| < \varepsilon$$

(NEEM  $f \in F$  MET  $\|g - f\| < \varepsilon/3$ )

DAN ALS  $y \in O$  DAN  $y \in O_f$  EN

$$\text{DUS } |g(y) - f(y)| < \varepsilon.)$$

DUS EEN OMGEVING VAN  $x$  WERKT VOOR

ALLE  $f \in K$  TEGELIJK

WE ZEGGEN DAT  $K$  GELYKMATIG CONTINU

(OF EQUICONTINU) IS IN  $\mathcal{C}$ .

CONCLUSIE

ALS  $K$  COMPACT IS DAN IS  $K$  GELYKMATIG

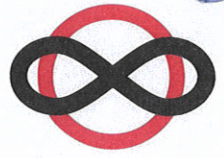
CONTINU EN BEGRENSD

BEGRENSD:  $\max \{ \|f\| : f \in K \}$  BESTAAT

WEGENS COMPACTHEID

ALS  $X$  COMPACT HAUSDORFF IS DAN

GELDT MET OMGEKEERDE POK.



STEL  $K \subseteq (C(X, \mathbb{R}))$  IS BEGRENSD EN GELYKMATIG CONTINU

• DAN IS DE AFSLUITING VAN  $K$  OOK GELYKMATIG CONTINU.

ZY  $x \in X$  EN  $\epsilon > 0$

NEEM  $O$  OPEN MET  $x \in O$  EN ZÓ DAT VOOR ALLE  $f \in K$  EN  $y \in O$

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

ALS  $g \in \bar{K}$  DAN IS ER EEN  $f \in K$

$$\text{MET } \|g - f\| < \frac{\epsilon}{3}$$

DAN VOLGT  $|g(y) - g(x)| < \epsilon$  VOOR  $y \in O$ .

• NEEM NU OOK AAN DAT  $K$  GESLOTEN IS TOV  $\|\cdot\|$ .

WE BEKIJKEN DE AFSLUITING VAN  $K$  TOV  $J_p$

- STEL  $g \in \bar{K}$  TOV  $J_p$

ZY  $x \in X$  EN  $\epsilon > 0$

NEEM  $O$  OPEN MET  $x \in O$  EN ZÓ DAT VOOR ALLE  $f \in K$  EN  $y \in O$

$$|f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

ZY  $y \in O$  EN NEEM  $f \in K$  ZÓ DAT

$$|g(y) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3} \text{ EN } |g(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

MAAR DAN  $|g(y) - g(x)| < \epsilon$  (ALS BOVEN)

CONCLUSIE DE AFSLUITING VAN  $K$  IN  $J_p$

BESTAAFT UIT CONTINUE FUNCTIES

EN IS OOK GELYKMATIG CONTINU.

- WE BEWYZEN DAT DE TOPOLOGIE VAN  $\|\cdot\|$

EN  $J_p$  GELYK ZYN OP  $\bar{K}$

DAN ZYN WE KLAAAR:

-  $\bar{K} = \prod_{x \in X} [-M_x, M_x]$  ( $M_x = \sup\{|f(x)| : f \in K\}$ )

-  $\bar{K}$  IS COMPACT TOV  $J_p$  EN DUS TOV  $\|\cdot\|$ .

-  $K$  IS GESLOTEN TOV  $\|\cdot\|$  OVS GESLOTEN IN  $\bar{K}$  EN DUS COMPACT TOV  $\|\cdot\|$

- EN ACHTERNAARIGELDT  $K = \bar{K}$  TOV  $J_p$

WIE WETEN DAT  $\mathcal{T}_p$  EEN DEEL  
IS VAN DE TOPOLOGIE VAN  $\mathbb{R}^n$ .



OMGEKEERD

Zij  $f \in \mathcal{K}$  EN ZIJ  $\varepsilon > 0$

WIE ZOEKEN EEN  $\mathcal{T}_p$ -OMGEVING  $U$  VAN  $f$   
ZÛ DAT  $U \cap \mathcal{K} = B(f, \varepsilon)$

VOOR ELKE  $x \in X$  IS ER EEN OPEN  
VERZAMELING  $O_x$  ZÛ DAT VOOR  
ALLE  $g \in \mathcal{K}$  EN ALLE  $y \in O_x$  GELDT  
 $|g(y) - g(x)| < \varepsilon/3$ .

WEGENS DE COMPACTHEID VAN  $X$  IS ER  
EEN EINDIGE VERZAMELING  $E \subseteq X$   
ZÛ DAT  $X = \bigcup_{x \in E} O_x$ .

NEEM NU DE VOLGENDE BASIS-OPEN  
VERZAMELING

$$U = \left\{ h \in \mathcal{K} : (\forall x \in E) (|h(x) - f(x)| < \varepsilon/3) \right\}$$

$$(U = \bigcap_{x \in E} (f(x) - \varepsilon/3, f(x) + \varepsilon/3))$$

NEEM  $g \in U \cap \mathcal{K}$  EN  $y \in X$

ER IS EEN  $x \in E$  MET  $y \in O_x$

EN DUS  $|g(y) - f(y)|$

$$\leq |g(y) - g(x)| + |g(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)|$$

$$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3$$

$$= \varepsilon$$

DUS  $\|g - f\| = \max\{|g(y) - f(y)| : y \in X\} < \varepsilon$ .