AM3590 2020-09-01

WAT IS DIMENSIE?

LIN ALG: AANTAL ELEMENTEN IN EEN BASIS

1878 CANTOR:
ER IS EEN BIJECTIE TUSSEN $[0,1]$ EN $[0,1]^n$.

DIMENSIE "AANTAL COÖRDINATEN"

CANTOR: IK KAN $[0,1]^3$ MET ĒĒN COÖRDINAAT BESCHRIJVEN.

"DIT GOOIT HET BEGRIP DIMENSIE OMVER"

DEDEKIND: "RUSTIG! JOUW BIJECTIE IS NIET CONTINU"!

STRATEGIE VAN CANTOR.

$$[0,1] \sim \mathbb{P} = [0,1] \setminus \mathbb{Q}$$

$$\mathbb{P} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \longleftrightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) \longleftrightarrow \begin{matrix} (x_1, x_3, x_5, x_7, \dots) \\ (x_2, x_4, x_6, x_8, \dots) \end{matrix}$$

NATUURLYK IDEM VOOR

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \longleftrightarrow (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^n$$

OPGAVE: MAAK EEN BIJECTIE

$$\underline{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \longleftrightarrow \underline{(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}}$$

- $b : \mathbb{P} \longleftrightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

  $b \times b : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \longleftrightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

  $(p, q) \longmapsto (b(p), b(q))$

  $b^n : \mathbb{P}^n \longleftrightarrow (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^n$

- $c : [0,1] \longleftrightarrow \mathbb{P}$

  $c^n : [0,1]^n \longleftrightarrow \mathbb{P}^n$

CONCLUSIE

$$\begin{tikzcd}
{[0,1]} \arrow[r, leftrightarrow, "c"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathbb{P} \arrow[r, leftrightarrow, "b"] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \arrow[d, leftrightarrow] \\
{[0,1]^n} \arrow[r, leftrightarrow, "c^n"] & \mathbb{P}^n \arrow[r, leftrightarrow, "b^n"] & (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^n
\end{tikzcd}$$

$c : [0,1] \longrightarrow \mathbb{P}$

- $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{ q_n : n \in \mathbb{N} \}$
- $p_n = \dfrac{1}{n\sqrt{2}} \quad (n \in \mathbb{N})$
- $$\begin{aligned} c : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{P} \\ q_n &\longmapsto p_{2n} \\ p_n &\longmapsto p_{2n-1} \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$ <u>ANDERS</u>

NU NOG $\quad b : \mathbb{P} \longrightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

EIGENLIJK $\quad b^{-1} : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{P}$

$\underline{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

$$b^{-1}(\underline{a}) = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5 + \cdots}}}}}$$

KETTINGBREUK.

$$\frac{1}{a_1}, \quad \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}, \quad \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}},$$

$[a_1]$ $\quad [a_1, a_2]$ $\quad [a_1, a_2, a_3]$

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}}}, \; \ldots$$

$[a_1, a_2, a_3, a_4]$

DE RIJ GETALLEN

$[a_1]$, $[a_1, a_2]$, $[a_1, a_2, a_3]$, ------

(DE CONVERGENTEN)

CONVERGEERT NAAR EEN IRRATIONAAL GETAL x IN $(0,1)$.

$$[a_1, a_2, a_3, \_\_\_, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$$

$$\left|\frac{p_n}{q_n} - x\right| < \frac{1}{q_n^2}$$

NEEM $a \in (0,1)$

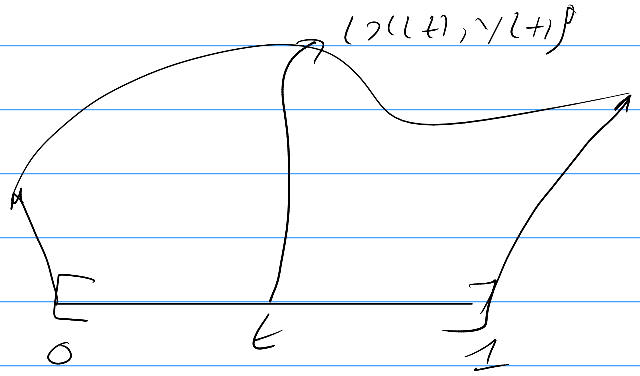
$$\begin{aligned} 1 &= a_1 \cdot a + r_1 & \quad 0 \leq r_1 < a \\ a &= a_2 \cdot r_1 + r_2 & \quad 0 \leq r_2 < r_1 \\ r_1 &= a_3 r_2 + r_3 & \quad \_\_\_,\ \_\_\_ \end{aligned}$$

DIT STOPT NA EINDIG VEEL STAPPEN DESDA $a \in \mathbb{Q}$

$$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$$

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{1}{2 + \sqrt{2}-1} = \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1+\sqrt{2}}}} \text{ ------}$$

1890 PEANO: IK MAAK TWEE CONTINUE FUNCTIES $x(t)$ EN $y(t)$ ZO DAT $t \longmapsto (x(t), y(t))$ SURJECTIEF IS VAN $[0,1]$ NAAR $[0,1]^2$.



$$T = 0.t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 \ldots$$

DIT IS EEN <u>RIJTJE</u> 0, 1, 2 NIETSMEER

$$k(a) = 2 - a \qquad k(0) = 2$$
$$k(1) = 1$$
$$k(2) = 0$$

$$k^n(a) = a \quad n \text{ EVEN}$$
$$k^n(a) = k(a) \quad n \text{ ONEVEN}$$
$$k(a) \equiv a \quad (\text{MOD } 2)$$

$$T \longrightarrow (X, Y)$$

$$x_1 = t_1 \qquad y_1 = k^{t_1}(t_2)$$
$$x_2 = k^{t_2}(t_3) \qquad y_2 = k^{t_1+t_3}(t_4)$$
$$x_3 = k^{t_2+t_4}(t_5) \qquad y_3 = k^{t_1+t_3+t_5}(t_6)$$
$$x_4 = k^{t_2+t_4+t_6}(t_7) \qquad y_4 =$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$x_n = k^{t_2+t_4+\cdots+t_{2n-2}}(t_{2n-1}) \qquad y_n = k^{t_1+t_3+\cdots+t_{2n-1}}(t_{2n})$$
$$\vdots \qquad \vdots$$

T UIT X EN Y TERUGVINDEN

$t_1 = x_1$ $\qquad t_2 = R^{x_1}(y_1)$

$t_3 = R^{y_1}(x_2)$ WANT $y_1 \equiv t_2 \mod 2$

$t_4 = R^{x_1 + x_2}(y_2)$

ENZOVOORT ...

$$T \text{ --- } t' = \mathrm{VAL}(T)$$

$$= \frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{9} + \dots + \frac{t_n}{3^n} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} t_n 3^{-n}$$

OPGAVE $T \longmapsto t'$ IS SURJECTIEF NAAR $[0,1]$.

DE AFBEELDING : $[0,1] \longrightarrow [0,1]^2$
WORDT GEGEVEN DOOR

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{VAL}(T) & \longmapsto & (\mathrm{VAL}(X), \mathrm{VAL}(Y)) \\ \uparrow & & \uparrow \quad \uparrow \\ T & \text{---} & (X, Y) \end{array}$$

STEL $T \text{ --- } (X, Y)$

$S \text{ --- } (U, V)$

EN $\mathrm{VAL}(T) = \mathrm{VAL}(S)$

GELDT DAN WEL

$VAL(X) = VAL(U)$ EN

$VAL(Y) = VAL(V)$??

$VAL(S) = VAL(T)$ BETEKENT

(DECIMAAL $0.5000000 \ldots$
$0.4999999 \ldots$
$VAL = 1/2$)

$S \ldots \quad 0.\, s_1 s_2 \ldots s_n \; s_{n+1} \; 0\,0\,0\,0\,0 \ldots$

$T \quad 0.\, s_1 s_2 \ldots s_n \; (s_{n+1} - 1) \; 2\,2\,2\,2\,2 \ldots$

$(t_{n+1} + 1)$

t_{n+1}

MOOIE PUZZEL:
LAAT ZIEN DAT NU

$VAL(X) = VAL(U)$ EN $VAL(Y) = VAL(V)$.

WE WETEN
- HET IS EEN AFBEELDING
- EN HIJ IS SURJECTIEF

IS HIJ CONTINU ??

ANTWOORD: JA

Neem $n \in \mathbb{N}$

Stel S en T zijn zodat

$$|val(S) - val(T)| < 9^{-n} \quad (= 3^{-2n})$$

Kijk naar de eerste i met $s_i \neq t_i$

- $i > 2n$

  $x_j = u_j$ en $y_j = v_j$ $\quad j \le n$

  dus $|val(X) - val(U)| < 3^{-n}$

  $|val(Y) - val(V)| < 3^{-n}$

- $i \le 2n$

  het resultaat is

  $$|val(X) - val(U)| \le 2 \cdot 3^{-n}$$
  $$|val(Y) - val(V)| \le 2 \cdot 3^{-n}$$