AM3590 2020-09-04 ①

- CANTOR: BIJECTIES $[0,1] \longrightarrow [0,1]^n$
  (NIET CONTINU)

- PEANO: SURJECTIES, CONTINU
  $[0,1] \longrightarrow [0,1]^n$
  MET INDUCTIE ALLE $n \geq 2$.
  (NIET INJECTIEF,
  $1/9,\ 5/9 \longmapsto (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$)

ALS $n \neq m$ ZIJN $[0,1]^n$ EN $[0,1]^m$ HOMEOMORF? IDEM $\mathbb{R}^n$ EN $\mathbb{R}^m$.

ALS X EN Y METRISCHE RUIMTEN ZIJN DAN IS $f: X \longrightarrow Y$ EEN <u>HOMEOMORFISME</u> ALS

- f BIJECTIEF
- f CONTINU
- f^{-1} CONTINU

X: $\mathbb{R}$ MET DISCRETE METRIEK
Y: $\mathbb{R}$ MET GEWONE METRIEK

$\mathrm{ID}: X \longrightarrow Y$

IS BIJECTIEF EN CONTINU
GEEN HOMEOMORFISME

HOMEOMORF: TOPOLOGISCH IDENTIEK.

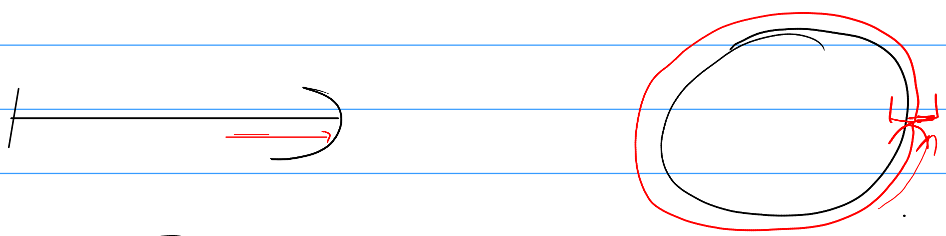
ARCTAN: $\mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$
IS EEN HOMEOMORFISME
DE INVERSE
TAN: $(-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$
IS OOK CONTINU.

VOLLEDIGHEID EN TOTALE BEGRENSDHEID ZYN <u>METRISCH</u>
NIET <u>TOPOLOGISCH</u>

$\mathbb{R}$ IS VOLLEDIG $(-\pi/2, \pi/2)$ NIET

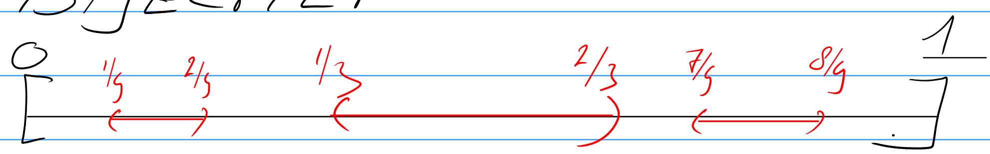
$(-\pi/2, \pi/2)$ IS TOT. BEGRENSD, $\mathbb{R}$ NIET

$f(t) = \exp(it)$ IS BIJECTIEF
VAN $[0, 2\pi)$ NAAR DE
EENHEIDSCIRKEL $\{z : |z| = 1\}$



GEEN HOMEOMORFISME.

C : CANTORVERZAMELING
f DE AFB VAN PEANO
DAN $f[C] = C \times C$
BIJECTIEF



ETC

CANTOR $x \in C$ DESDA

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} 2x_n 3^{-n} \quad \begin{pmatrix} x_n = 0 \\ x_n = 1 \end{pmatrix}$$

"x IS TERNAIR TE SCHRIJVEN MET ENKEL NULLEN EN TWEEËN"

CONCLUSIE $C \simeq C \times C$

STELLING
STEL $f: X \longrightarrow Y$ IS EEN CONTINUE BIJECTIE EN X IS COMPACT.
DAN IS f^{-1} CONTINU

BEWIJS:
T.B. ALS $O \subseteq X$ OPEN IS DAN IS $\underbrace{(f^{-1})^{-1}[O]}_{f[O]}$ OPEN IN Y.

- $X \setminus O$ IS GESLOTEN DUS COMPACT
- DUS $f[X \setminus O]$ IS OOK COMPACT
- EN DUS GESLOTEN (!)
- DUS $f[O] = Y \setminus f[X \setminus O]$ IS OPEN.

OPGAVE: STEL $f: [0,1]^2 \longrightarrow [0,1]$ IS CONTINU $\quad [0,1]^3 \longrightarrow [0,1]^2$.
BEWIJS: HIJ IS NIET INJECTIEF
STEL $f(0,0) \neq f(1,1)$
LAAT ZIEN DAT ER ONEINDIG VEEL (x,y) ZIJN MET $f(x,y) = \frac{1}{2}(f(0,0) + f(1,1))$

KAN 1 VERSUS 2 MAKKELIJKER!

STEL

$f: [0,1] \longrightarrow [0,1]^2$

IS EEN HOMEOMORFISME

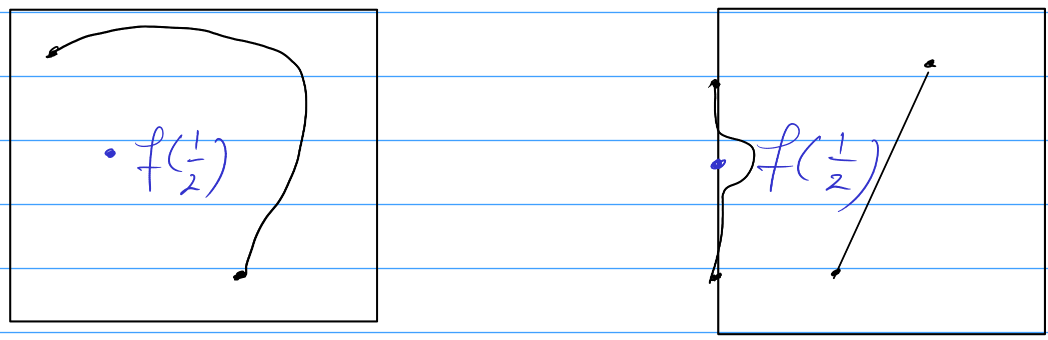
DAN GEEFT DIT OOK EEN HOMEOMORFISME TUSSEN

$[0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ EN $[0,1]^2 \setminus \{f(\frac{1}{2})\}$

$[\ \ )\ \ (\ \ ]$

NIET SAMENHANGEND

WEL SAMENHANGEND



ZELFS BOOGSAMENH.

DE EIGENSCHAP

"ER IS EEN PUNT MET ONSAMENHANGEND COMPLEMENT"

ONDERSCHEIDT $[0,1]$ EN $[0,1]^2$

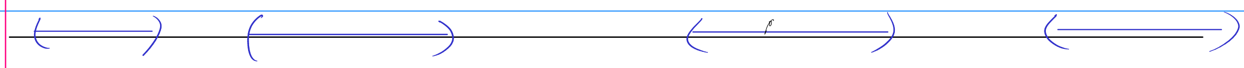
WE GAAN op ZOEK NAAR DIT SOORT EIGENSCHAPPEN

Ook: Invariantie van Gebied

Stel $U \subseteq \mathbb{R}^n$ is open
$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ continu
en injectief
Dan is $f[U]$ open.

Analyse 2 voor continu-
differentieerbare f

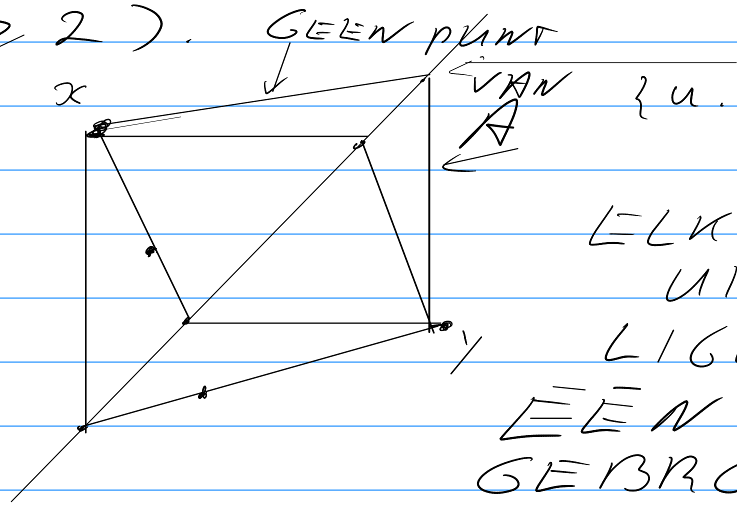
$n = 1$ "makkelyk"



① ZBDA U is een interval
② Op zo'n interval is f
strikt stygend of dalend
Dan is $f[U]$ een open
interval

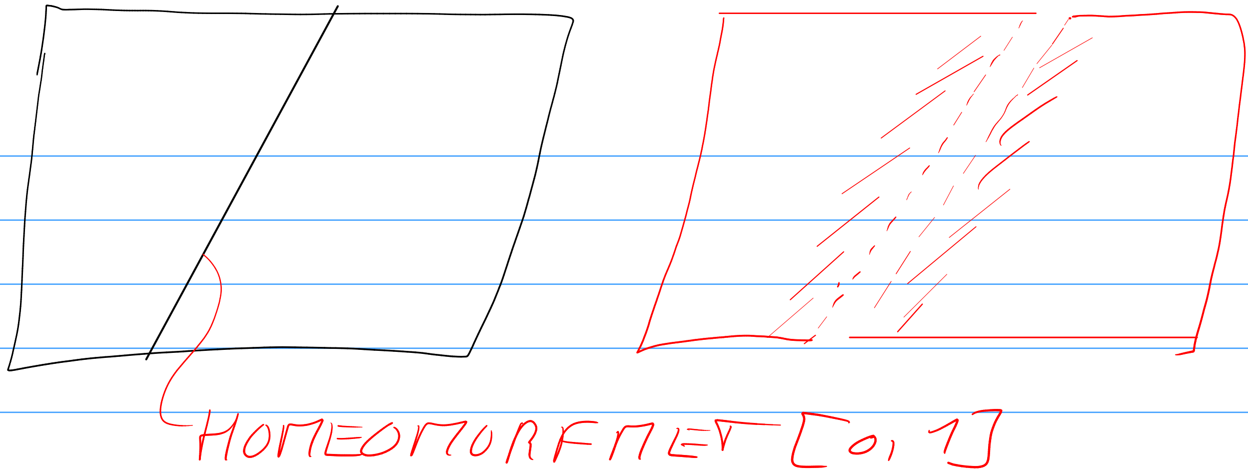
Cantor: Als $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aftelbaar
is dan is $\mathbb{R}^n \setminus A$ samenhangend
$(n \geq 2)$.

$x, y \notin A$



$\{u : \|u - x\| = \|u - y\|\}$

Elk punt
uit A
ligt op
één zo'n
gebroken lyn



$[0,1]^2$ HEEFT DE EIGENSCHAP
"ER IS EEN KOPIE VAN $[0,1]$ MET ONSAMENHANGEND COMPLEMENT"

HEEFT $[0,1]^3$ DAT MISSCHIEN NIET?

WE DEFINIËREN
$\dim X$

VOOR METRISCHE RUIMTEN ALLEEN IN TERMEN VAN OPEN EN GESLOTEN VERZ'N.

CONCLUSIE

$$X \simeq Y \Longrightarrow \dim X = \dim Y$$

$[\dim [0,1]^n = \dim \mathbb{R}^n = n$

VOOR ALLE $n = 1, 2, 3, \ldots$

EN DUS

ALS $m \neq n$ DAN

$\mathbb{R}^m \not\cong \mathbb{R}^n$ EN $[0,1]^m \not\cong [0,1]^n$

ONDERWEG NODIG

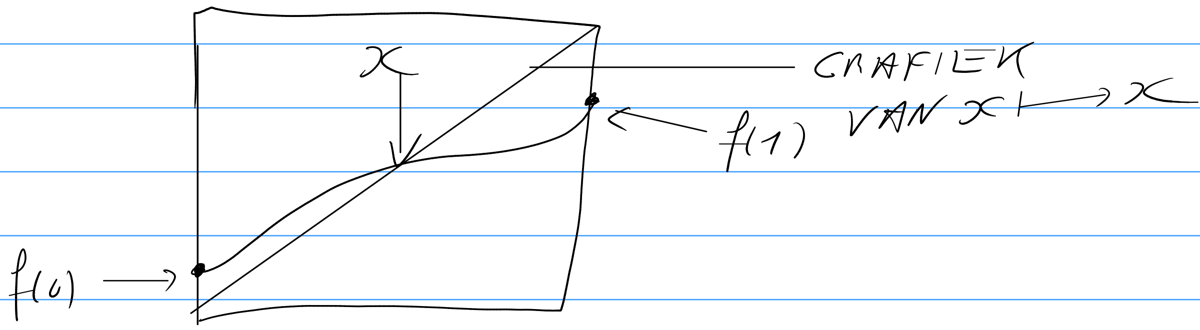
BROUWER:

ALS $f : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]^n$

CONTINU IS DAN IS ER

EEN $\underline{x}$ MET $f(\underline{x}) = \underline{x}$

$n = 1$ MAKKELYK VIA DE TUSSENWAARDESTELLING



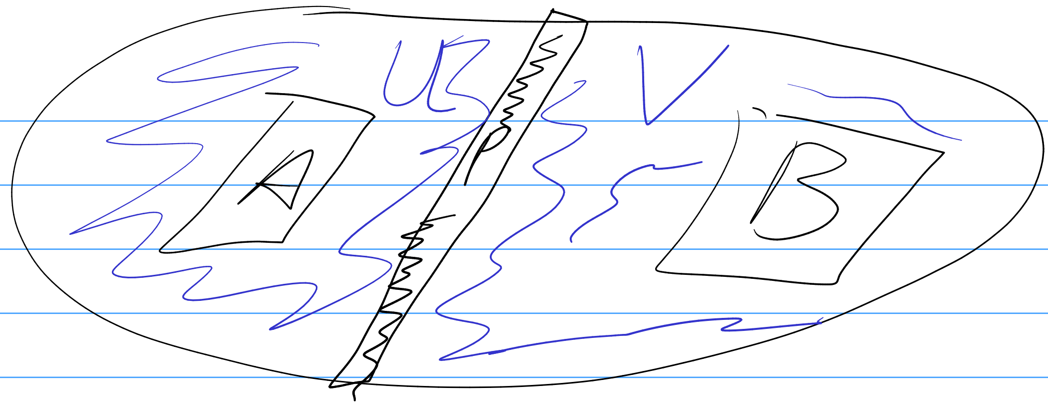
<u>PARTITIE</u> IN EEN RUIMTE X

P IS EEN PARTITIE TUSSEN A EN B ALS

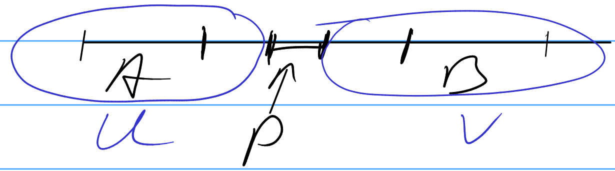
$X \setminus P = U \cup V$ MET

- $A \subseteq U$
- $B \subseteq V$
- $U \cap V = \emptyset$

U EN V OPEN



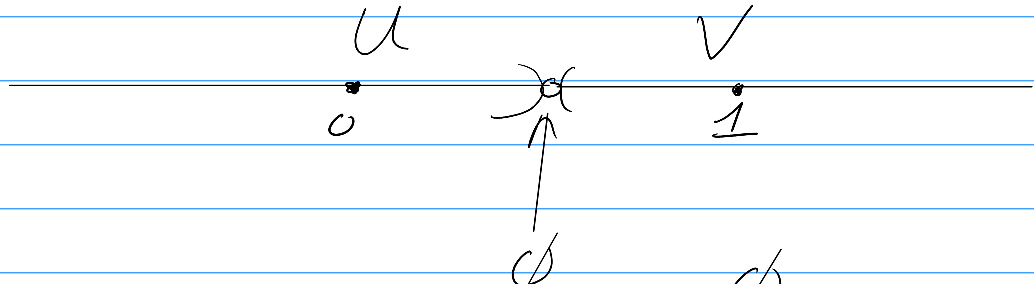
- $\{1/2\}$ IS EEN PARTITIE TUSSEN $[0, 1/3]$ EN $[2/3, 1]$ IN $[0, 1]$
  $[4/9, 5/9]$ OOK



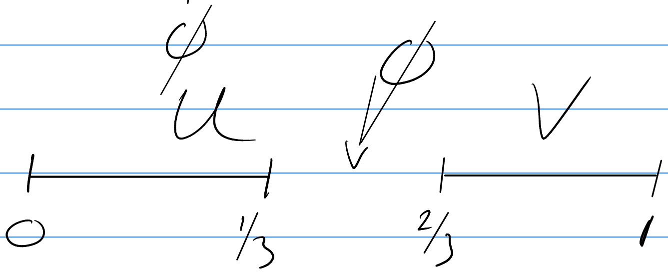
- $\emptyset$ IS EEN PARTITIE TUSSEN 0 EN 1 IN $\mathbb{Q}$

$$U = \{q : q < \tfrac{1}{\sqrt{2}}\}$$

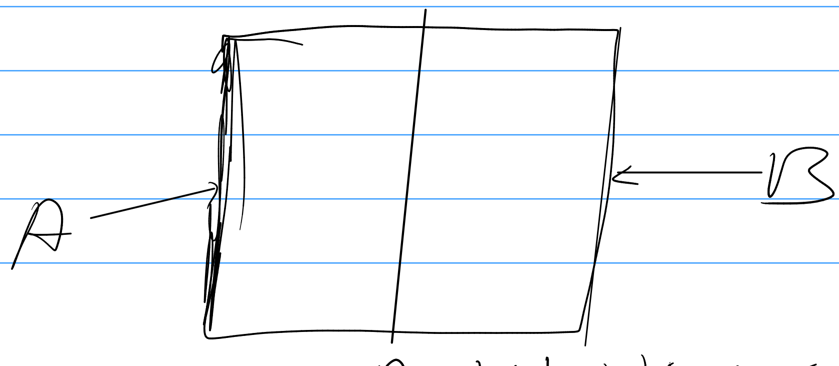
$$V = \{q : q > \tfrac{1}{\sqrt{2}}\}$$



- IN $\mathbb{C}$



-



$$p = \{(\tfrac{1}{2}, y) : 0 \le y \le 1\}$$

X EEN METRISCHE RUIMTE
$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

DIM $X \leq n$ BETEKENT

VOOR ELK $n+1$-TAL PAREN DISJUNCTE GESLOTEN VERZ'N
$(A_0, B_0), (A_1, B_1), \ldots, (A_n, B_n)$
ZIJN ER PARTITIES
$P_0, P_1, \ldots, P_n$
DUS P_i TUSSEN A_i EN B_i
MET

$$\bigcap_{i=0}^{n} P_i = \emptyset$$

DIM $X = n$ BETEKENT

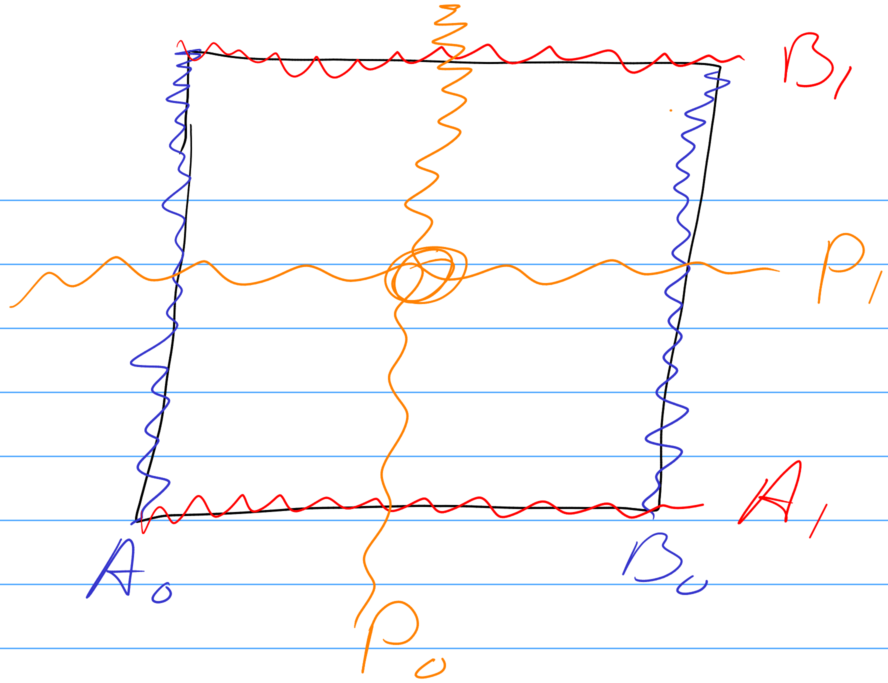
DIM $X \leq n$ ÈN DIM $X \not\leq n-1$

WE WILLEN DIM $[0,1]^2 = 2$

DIM $\not\leq 1$ BETEKENT

ER ZIJN PAREN (A_0, B_0) EN (A_1, B_1) ZÓ DAT VOOR ELK TWEETAL PARTITIES P_0 EN P_1

GELDT $P_0 \cap P_1 \neq \emptyset$


B₁
P₁
A₁
A₀
B₀
P₀