ALS $(X,d)$ EN $(Y,\rho)$ METRISCHE RUIMTEN ZYN, DAN GEEFT

$$\underline{d}((x,y),(u,v)) =$$

$$d(x,u) + \rho(y,v)$$

EEN METRIEK op $X \times Y$

$$\boxed{\max\{d(x,u), \rho(y,v)\}}.$$

$$\sqrt{d(x,u)^2 + \rho(y,v)^2}$$

DIM $X \leq n$ BETEKENT

VOOR ELK $n+1$-TAL PAREN

$(A_0, B_0), (A_1, B_1), \ldots, (A_n, B_n)$

DISJ. GESL. VERZ'N ZIJN ER

PARTITIES $P_0, P_1, \ldots, P_n$

($P_i$ TUSSEN $A_i$ EN $B_i$)

MET $$\bigcap_{i=0}^{n} P_i = \emptyset$$

DIM $X \geq n$ (DUS DIM $X \nleq n-1$)

WORDT: ER ZIJN $n$ PAREN

$(A_1, B_1), \ldots, (A_n, B_n)$

DISJ. GESL. VERZ'N ZÓ DAT

VOOR ELK $n$-TAL PARTITIES

$P_1, \ldots, P_n$ ($P_i$ TUSSEN $A_i$ EN $B_i$)

GELDT $$\bigcap_{i=1}^{n} P_i \neq \emptyset.$$

$\dim [0,1]^n = \dim \mathbb{R}^n = n.$

- $\dim [0,1]^n \leq \dim \mathbb{R}^n$
- $\dim \mathbb{R}^n \leq \dim [0,1]^n$

(DE BEWIJZEN ZEGGEN NIET WAT DIE WAARDEN ZIJN, ALLEEN DAT ZE GELIJK ZIJN)

---

$\dim [0,1] = 1$

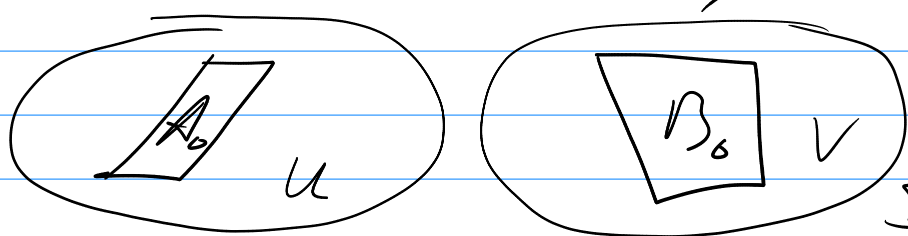
① $\dim [0,1] \not\leq 0$

$\dim X \leq 0$ BETEKENT NAMELIJK

VOOR ELK PAAR $(A_0, B_0)$ DISJUNCTE GESL. VERZ'N IS ER EEN PARTITIE $P_0$ TUSSEN $A_0$ EN $B_0$ MET

$$\bigcap_{i=0}^{0} P_i = \emptyset$$

DUS $P_0 = \emptyset$



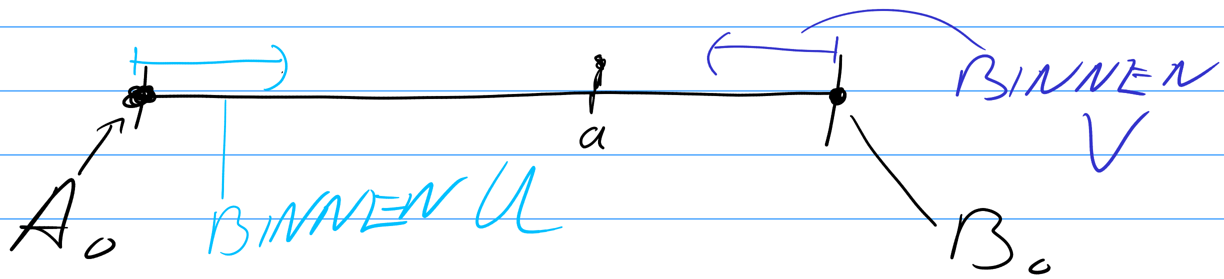

$U \cap V = \emptyset$
$U \cup V = X$
THB

$P_0 = X \setminus (U \cup V)$ X ONSAMENH.

NEEM $A_0 = \{0\}$ , $B_0 = \{1\}$

STEL $A_0 \subseteq U$ , $B_0 \subseteq V$

EN $P_0 = [0,1] \setminus (U \cup V)$




NEEM $a = \sup U$

- $0 < a < 1$
- $a \in \overline{U}$
  MAAR $a \notin U$
  ANDERS WAS ER EEN $\varepsilon > 0$
  MET
  $$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq U$$
  MAAR DAN IS a NIET
  HET SUPREMUM
- $a \notin V$
  ANDERS $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq V$
  DAN ZOU
  $$(a-\varepsilon, a) \cap U \neq \emptyset$$

DAN ZOU $V \cap U \neq \emptyset$.

DIM $[0,1] \leq 1$

STEL $(A_0, B_0)$ EN $(A_1, B_1)$
ZIJN TWEE PAREN DISJ.
GESL. VERZ'N.

VOOR ELKE $x \in A_0$ KIES
$p_x$ EN $q_x \in \mathbb{Q}$ MET
$x \in (p_x, q_x)$ EN $[p_x, q_x] \cap B_0 = \emptyset$
$(\cap [0,1])$

$A_0$ IS COMPACT DUS IS ER EEN
EINDIGE VERZ $F_0 \subseteq A_0$ MET

$$A_0 \subseteq \bigcup_{x \in F_0} (p_x, q_x)$$

- $U = \bigcup_{x \in F_0} (p_x, q_x)$ IS OPEN
- $V = [0,1] \setminus \bigcup_{x \in F_0} [p_x, q_x]$
- $A_0 \subseteq U$, $B_0 \subseteq V$

$$P_0 = [0,1] \setminus (U \cup V) \subseteq \bigcup_{x \in F_0} \{p_x, q_x\} \subseteq \mathbb{Q}$$

VOOR $A_1$ EN $B_1$ DOE HETZELFDE
MAAR KIES NU INTERVALLEN
$(s_x, t_x)$
MET $s_x, t_x \in \mathbb{Q} + \sqrt{2}$

DAN $P_1 \subseteq \mathbb{Q} + \sqrt{2}$

OK: $P_0 \cap P_1 \subseteq \mathbb{Q} \cap (\mathbb{Q} + \sqrt{2}) = \emptyset$

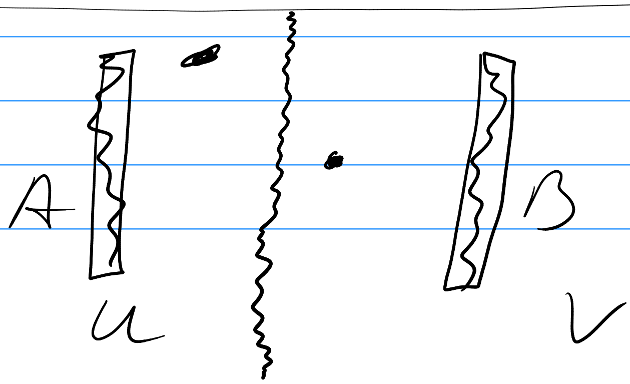
- $\dim [0,1]^n \leq \dim \mathbb{R}^n$

STELLING
ALS $F$ GESLOTEN IS IN $X$
DAN GELDT $\dim F \leq \dim X$.
BEWIJS
WE BEWIJZEN:
ALS $\dim X \leq n$ DAN $\dim F \leq n$.
STEL $(A_0, B_0), \ldots, (A_n, B_n)$ IS
EEN $n+1$-TAL PAREN DISJ.
GESL. VERZ'N. IN $F$

DAN IS DAT OOK ZO'N
$n+1$-TAL IN $X$

IN $X$ VINDEN WE PARTITIES
$P_0, \ldots, P_n$ MET BIJBEHORENDE
OPEN VERZ'N $U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n$.
$A_i \subseteq U_i$, $B_i \subseteq V_i$. $P_i = X \setminus (U_i \cup V_i)$
EN $U_i \cap V_i = \emptyset$ EN $\bigcap_{i=0}^{n} P_i = \emptyset$

NEEM $Q_i = F \cap P_i$
DAN IS $Q_i$ EEN PARTITIE
TUSSEN $A_i$ EN $B_i$ IN $F$
MET $\bigcap_{i=0}^{n} Q_i = \emptyset$



DIM $X \leq 0$ BETEKENT

VOOR <u>ELK</u> PAAR $(A_0, B_0)$

VAN DISJUNCTE GESLOTEN

VERZ'N IS $\exists$ EEN

PARTITIE TUSSEN $A_0$ EN $B_0$.

$$[0,1] \subseteq \underbrace{[0,2) \cup (2,4]}$$

ER ZIJN DUS OPEN $U$ EN $V$

MET $A_0 \subseteq U$, $B_0 \subseteq V$,

$$U \cap V = \emptyset \quad , \quad U \cup V = X$$

($U$ EN $V$ ZIJN OOK GESLOTEN)

DIM $\mathbb{N} = 0$

DIM $\mathbb{Q} = 0$

DIM $\mathbb{P} = 0$

DIM $C = 0$ (CANTORVERZ)

OPGAVE $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}$

VOLGENDE STAP

$$\dim \mathbb{R}^n \leq \dim [0,1]^n$$

$$\mathbb{R}^n \simeq (0,1)^n \subseteq [0,1]^n$$

STELLING AFTELBARE-GESLOTEN-SOM STELLING

STEL $X$ IS EEN METR. RUIMTE
STEL $\{F_k : k \in \mathbb{N}\}$ IS EEN AFTELBARE FAMILIE GESLOTEN VERZ'N
EN $m \in \mathbb{N}$ IS ZO DAT
$$\dim F_k \leq m \quad \text{VOOR ALLE } k$$
DAN VOLGT
$$\dim \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k \leq m.$$

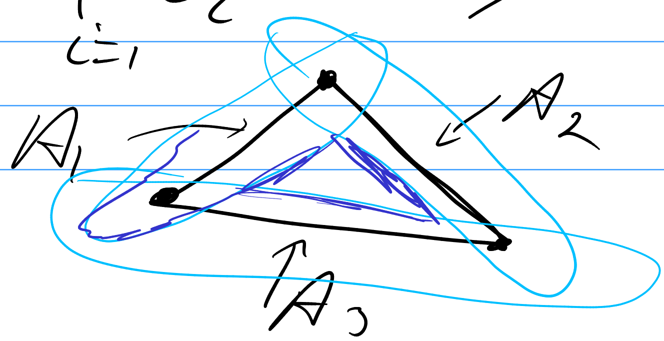
TOEPASSING $F_k = [-k, k]^m$ IN $\mathbb{R}^m$

$\dim F_k = \dim [0,1]^m$

$\dim \mathbb{R}^m \leq \dim [0,1]^m$

LEMMA

STEL $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ZIJN GESLOTEN VERZAMELINGEN MET
$$\bigcap_{i=1}^{k} A_i = \emptyset$$
DAN ZIJN ER OPEN VERZ'N $O_1, \ldots, O_k$ MET
$A_i \subseteq O_i$ (ALLE $i$) EN
$$\bigcap_{i=1}^{k} \overline{O_i} = \emptyset$$



BEWYS. INDUCTIE NAAR $k$

$k=2$

DEFINIEER $f: X \longrightarrow [0,1]$

DOOR

$$f(x) = \frac{d(x,A_1)}{d(x,A_1)+d(x,A_2)}$$

op $A_1$ CONSTANT NUL

op $A_2$ CONSTANT $1$

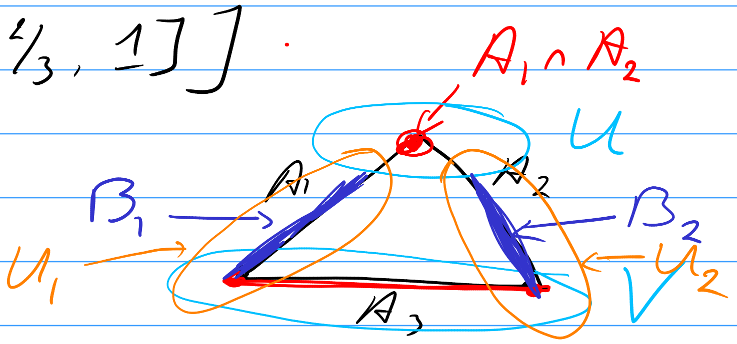
$$O_1 = f^{-1}\left[[0,\tfrac{1}{3})\right]$$

$$O_2 = f^{-1}\left[(\tfrac{2}{3},1]\right]$$

---

$k \longrightarrow k+1$

BEKYK




$\bigcap_{i=1}^{k} A_i$ EN $A_{k+1}$

(RANDGEVAL $\bigcap_{i=1}^{k} A_i = \emptyset$ PAS INDUCTIEAANN. TOE)

PAS GEVAL $k=2$ TOE

NEEM $U$ EN $V$ OPEN MET

$\bigcap_{i=1}^{k} A_i \subseteq U$, $A_{k+1} \subseteq V$

EN $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$

Neem $B_i = A_i \setminus U$ $i=1,\dots,k$

ER GELDT $\bigcap_{i=1}^{k} B_i = \emptyset$

INDUCTIE: ER ZYN $U_1,\dots,U_k$

MET $B_i \subseteq U_i$ (ELKE $i$)

EN $\bigcap_{i=1}^{k} \overline{U_i} = \emptyset$

NEEM $O_i = U_i \cup U$ $(1 \leq i \leq k)$

$O_{k+1} = V$

DAN $\bigcap_{i=1}^{k+1} \overline{O_i} = \emptyset$

SCHETS VAN HET BEWIJS

VOOR HET GEMAK $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$

BEGIN MET $(A_0, B_0), \dots, (A_n, B_n)$
WE MAKEN RIJEN

$P_0^1 \subseteq P_0^2 \subseteq P_0^3 \subseteq \dots$

$\vdots$

$P_n^1 \subseteq P_n^2 \subseteq P_n^3 \subseteq \dots$

GESLOTEN VERZ'N

TELKENS GELDT $P_0^k \cup \dots \cup P_n^k \subseteq F_1 \cup \dots \cup F_k$

$\bigcap_{i=0}^{n+1} P_i^k = \emptyset$

$P_i^k$ IS EEN PARTITIE TUSSEN

$A_i \cap (F_1 \cup \dots \cup F_k)$ EN $B_i \cap (F_1 \cup \dots \cup F_k)$

IN $F_1 \cup \dots \cup F_k$

NEEM DAN

$$P_i = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_i^k \qquad i \leq n$$

DIE ZYN ALS GEWENST.