AFT. GESL. SOMSTELLING
ALS $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ MET ELKE
F_k GESLOTEN EN $\dim F_k \leq n$
VOOR ALLE k
DAN $\dim X \leq n$.

WE MAKEN, GEGEVEN
$(A_0, B_0), \ldots, (A_n, B_n)$
RIJEN PARTITIES
$$P_0^1 \supseteq P_0^2 \supseteq P_0^3 \supseteq \cdots$$
$$P_i^1 \supseteq P_i^2 \supseteq P_i^3 \supseteq \cdots$$
$$F_k \cap \bigcap_{i=0}^{n} P_i^k = \emptyset$$

AAN HET EIND ZETTEN WE
$$P_i = \bigcap_{k=1}^{\infty} P_i^k$$

P_i IS EEN PART. TUSSEN A_i EN B_i

EN $\bigcap_{i=0}^{n} P_i = \emptyset$

LEMMA

STEL F IS GESLOTEN, $\dim F \leq n$
EN $(A_0, B_0), \ldots, (A_n, B_n)$ ZIJN
ALS ALTIJD: PAREN
DISJ. GESL. VERZ'N IN X

ER ZIJN PAREN $(U_0, V_0), \dots, (U_m, V_m)$ VAN OPEN VERZ'N.

MET $A_i \subseteq U_i$, $B_i \subseteq V_i$

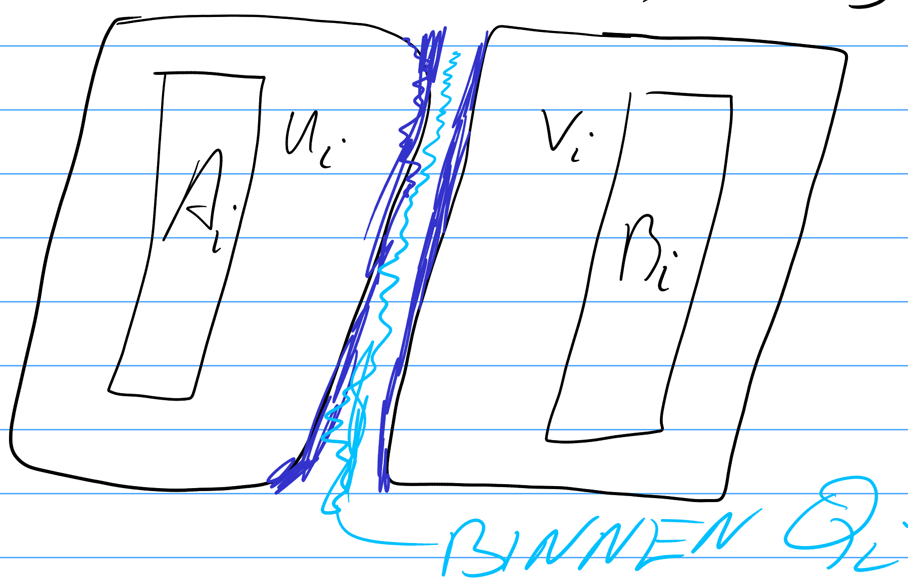
$\overline{U_i} \cap \overline{V_i} = \emptyset$

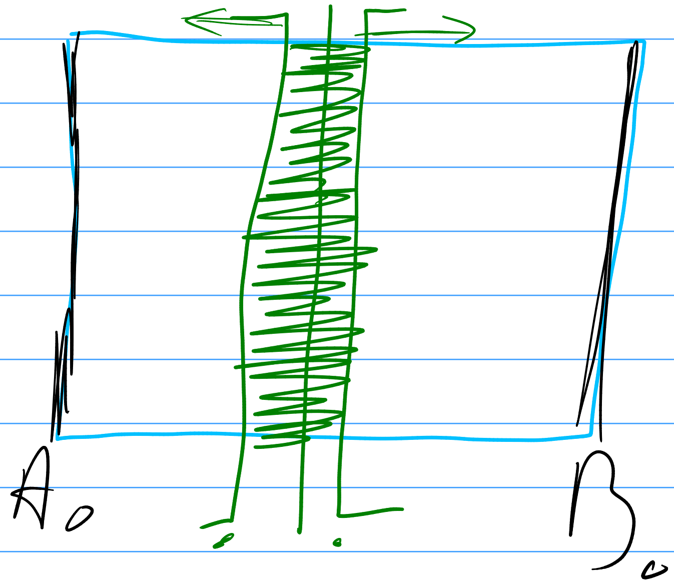
EN $F \cap \bigcap_{i=0}^{m} Q_i = \emptyset$

WAARBIJ $Q_i = X \setminus (U_i \cup V_i)$

Q_i IS EEN PARTITIE TUSSEN A_i EN B_i MAAR HIJ IS 'DIK'!

WANT $X \setminus (\overline{U_i} \cup \overline{V_i}) \subseteq Q_i$





WERK IN F EN BEKIJK
$(A_0 \cap F, B_0 \cap F), \ldots, (A_m \cap F, B_m \cap F)$

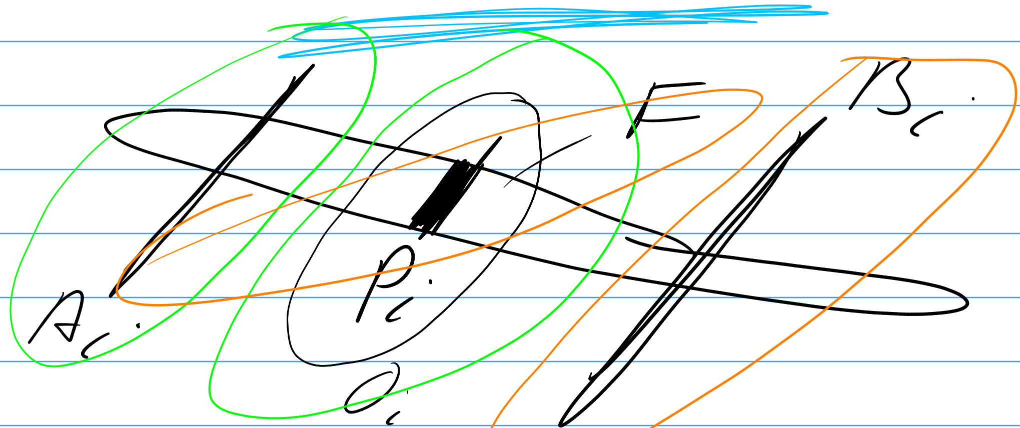
NEEM $P_0, \ldots, P_m$ GESLOTEN IN F, PARTITIES TUSSEN $A_i \cap F$ EN $B_i \cap F$ MET

$$\bigcap_{i=0}^{m} P_i = \emptyset$$

- P_i OOK GESL IN X

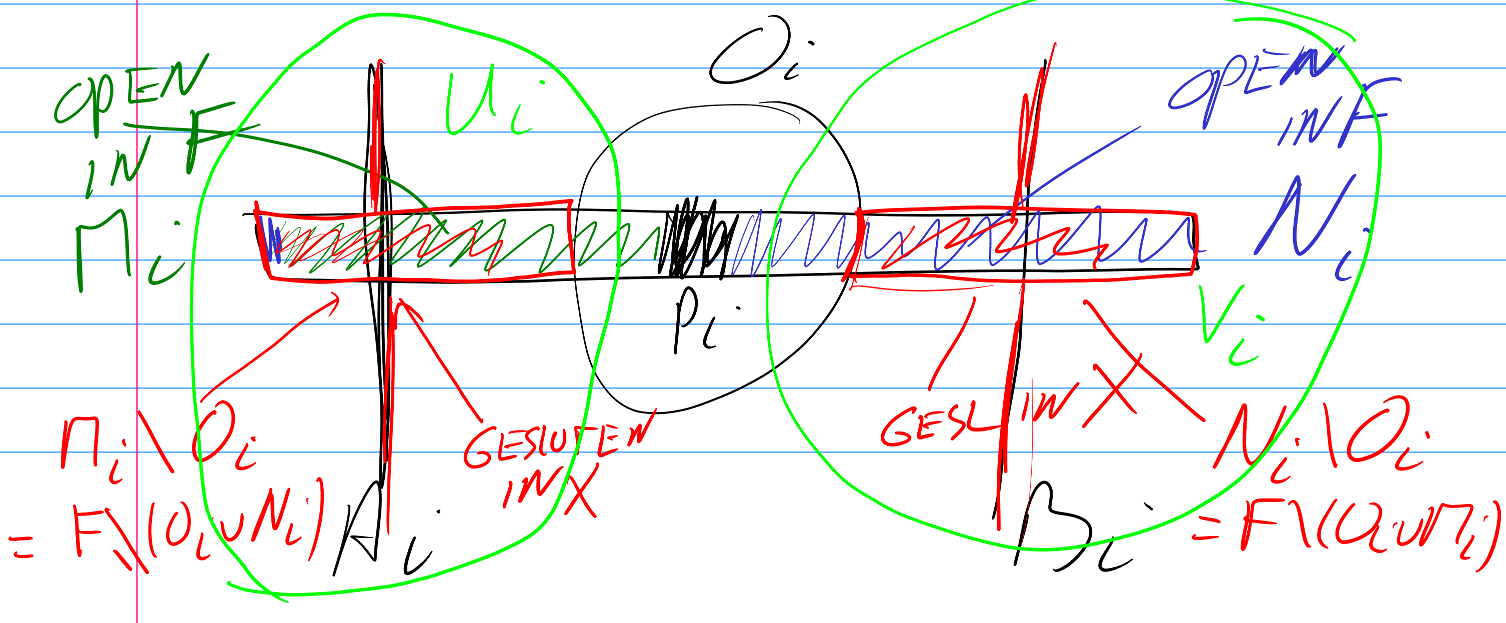
NEEM IN X OPEN VERZ'N $O_0, \ldots, O_m$ MET $P_i \subseteq O_i$ EN

$$\bigcap_{i=0}^{m} \overline{O_i} = \emptyset$$



WE MOGEN AANNEMEN

$\overline{O_i} \cap A_i = \emptyset$, $O_i \cap B_i = \emptyset$



WE HEBBEN

$K_i = F \setminus (O_i \cup N_i) \cup A_i$ IS GESLOTEN

$= M_i \setminus O_i \cup A_i$

$L_i = F \setminus (O_i \cup M_i) \cup B_i$

$= N_i \setminus O_i \cup B_i$

$K_i \cap L_i = \emptyset$; K_i, L_i GESLOTEN

NU NEMEN WE U_i EN V_i OPEN

MET $K_i \subseteq U_i$, $L_i \subseteq V_i$

EN $\overline{U_i} \cap \overline{V_i} = \emptyset$

EN $\underbrace{F \setminus (U_i \cup V_i)}_{Q_i} \subseteq O_i$

DUS $\bigcap_{i=0}^{m} Q_i \subseteq \bigcap_{i=0}^{m} O_i = \emptyset$

AFT. GESL. SOM ST.

1. PAS LEMMA TOE OP F_1
   EN (A_i, B_i) $i = 0, \dots, m$.
   WE KRIJGEN
   (U_i^1, V_i^1) $i = 0, \dots, m$
   MET

$$A_i \subseteq U_i^1 \qquad B_i \subseteq V_i^1$$

$$\overline{U_i^1} \cap \overline{V_i^1} = \emptyset$$

DUS $P_i^1 = X \setminus (U_i^1 \cup V_i^1)$

IS EEN PART. TUSSEN A_i EN B_i

EN $F_1 \cap \bigcap_{i=0}^{n} P_i^1 = \emptyset$

(2) PAS LEMMA TOE OP $F_{2\ k+1}$

$k \to k+1$ EN DE $(\overline{U_i^1}^{\,k}, \overline{V_i^1}^{\,k})$ $i = 0, \dots, n$

WE KRIJGEN

$U_i^{2\ k+1}$ EN $V_i^{2\ k+1}$ MET

$$\overline{U_i^1}^{\,k} \subseteq U_i^{2\ k+1}, \quad \overline{V_i^1}^{\,k} \subseteq V_i^{2\ k+1}$$

$$\overline{U_i^{2\ k+1}} \cap \overline{V_i^{2\ k+1}} = \emptyset$$

$$P_i^{2\ k+1} = X \setminus (U_i^{2\ k+1} \cup V_i^{2\ k+1})$$

$$F_{2\ k+1} \cap \bigcap_{i=0}^{n} P_i^{2\ k+1} = \emptyset$$

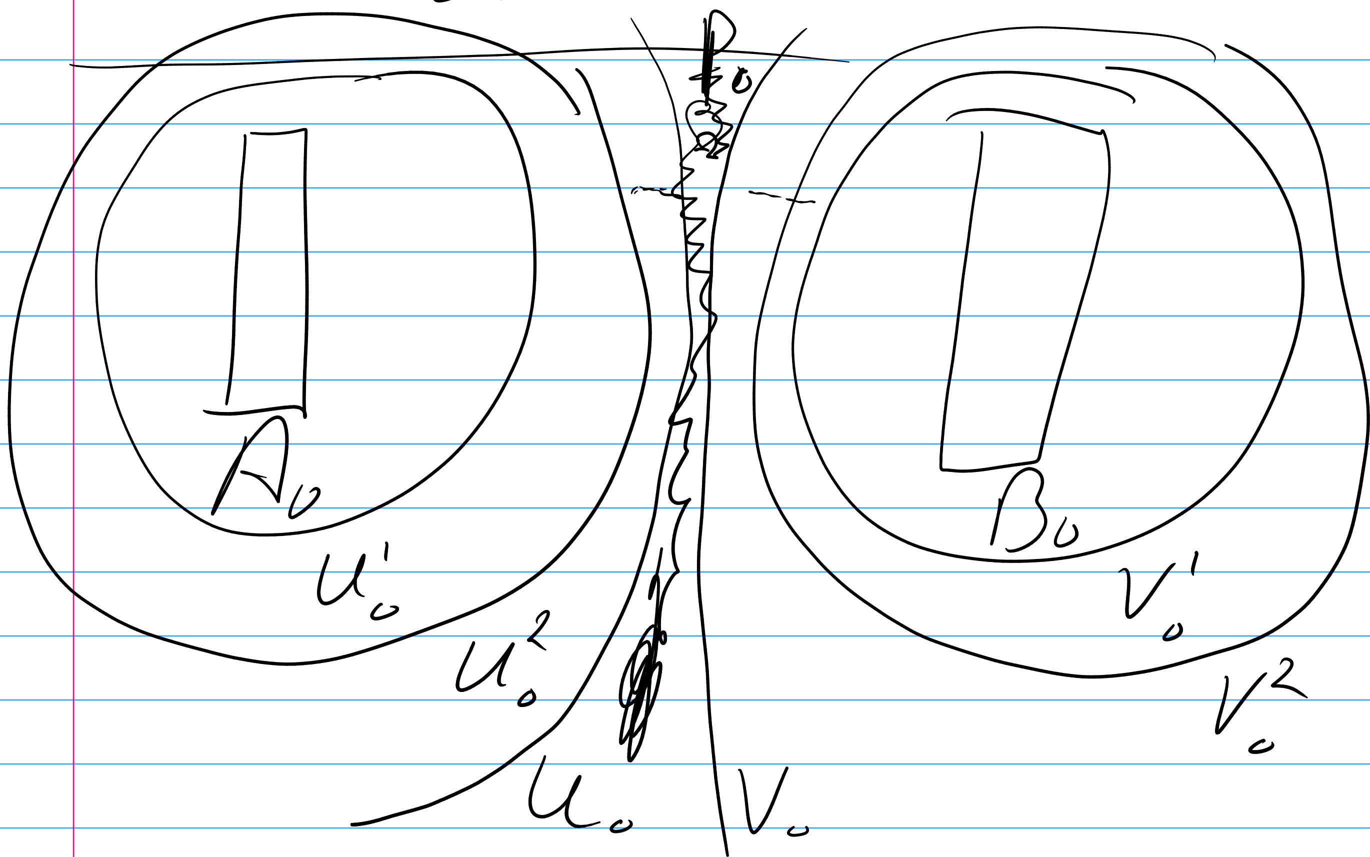
AAN HET EIND:

$$U_i = \bigcup_k U_i^k \qquad V_i = \bigcup_k V_i^k$$

$$P_i = \bigcap_k P_i^k$$

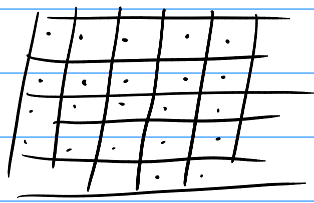
$$P_i = X \setminus (U_i \cup V_i)$$

- P_i IS PART. TUSSEN A_i EN B_i
- $\bigcap_{i=0}^{n} P_i = \emptyset$



WE WETEN NU DAT OOK $\dim \mathbb{R}^n \leq \dim [0,1]^n$

VIA $\mathbb{R}^n = \bigcup_k [-k,k]^n$



NU NOG

$\dim [0,1]^n \leq n$ — STRAKS

$\dim [0,1]^n \geq n$ — VOLGENDE WEEK

DIM $[0,1]^n \le n$.

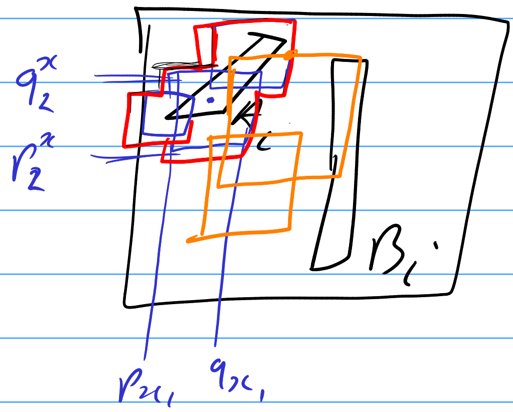
STEL $(A_0, B_0), \dots, (A_n, B_n)$ ZIJN PAREN DISJ. GESLOTEN VERZ'N IN $[0,1]^n$.

$$Q_i = \mathbb{Q} + i\sqrt{2}$$

NEEM i VAST
VOOR ELK PUNT x IN A_i NEMEN WE EEN OPEN BLOK $\prod_{i=1}^{n} (p_i^x, q_i^x) = C_x$

MET $x \in C_x$, $\overline{C_x} \cap B = \emptyset$

$p_i^x, q_i^x \in Q_i$



A_i IS COMPACT DUS IS ER EEN EINDIGE VERZ.

$E_i \subseteq A_i$ ZÓDAT

$$A_i \subseteq \underbrace{\bigcup_{x \in E_i} C_x}_{U_i}$$

$V_i = [0,1]^n \setminus \overline{U_i}$ IS OPEN EN $B_i \subseteq V_i$.

$$P_i = [0,1]^n \setminus (U_i \cup V_i) = \text{RAND } U_i \subseteq \bigcup_{x \in E_i} \text{RAND } C_x$$

! ALS $y \in P_i$ DAN !
HEEFT y EEN
COORDINAAT IN Q_i.

DIT VOOR ELKE $i = 0, 1, 2, \ldots, n$

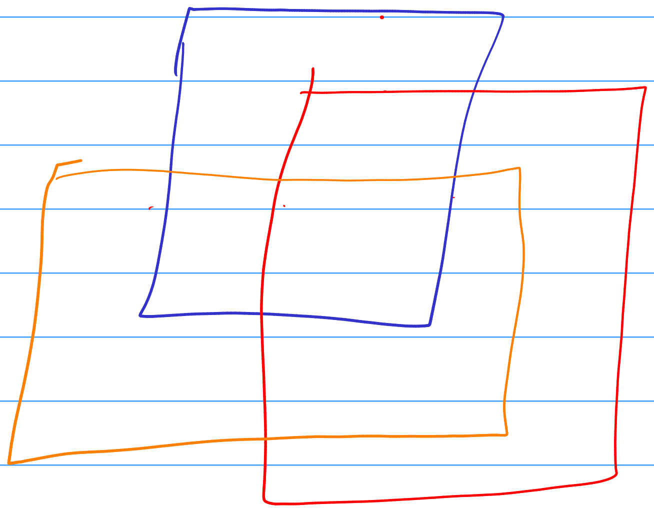
WE VINDEN $P_0, P_1, \ldots, P_m$

MET ALS $y \in P_0 \cap P_1 \cap \ldots \cap P_m$

DAN MOET y EEN COÖRDINAAT
HEBBEN IN ELKE Q_i

EN y HEEFT MAAR
m COÖRDINATEN

DAT KAN NIET: $\bigcap_{i=0}^{m} P_i = \emptyset$.



DIM $[0,1]^n \geq n$.

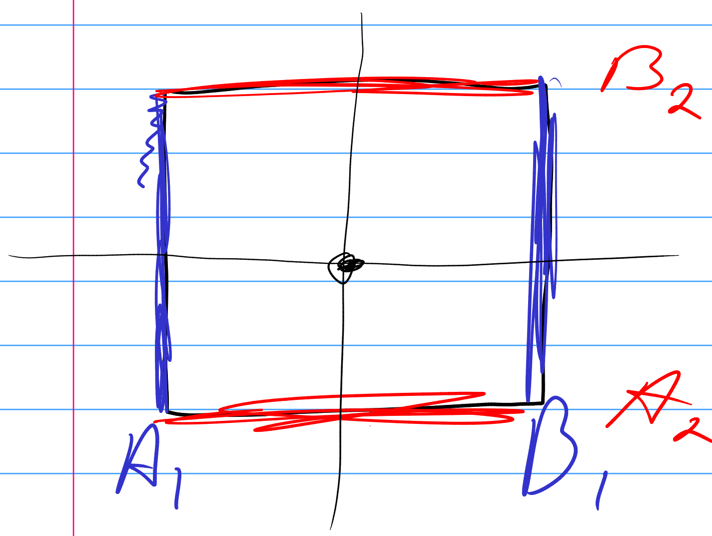
(*) WE MOETEN PAREN $(A_1, B_1), \ldots, (A_n, B_n)$ VINDEN/MAKEN MET: VOOR ELKE RIJ PARTITIES $P_1, \ldots, P_n$ (P_i TUSSEN A_i EN B_i) GELDT

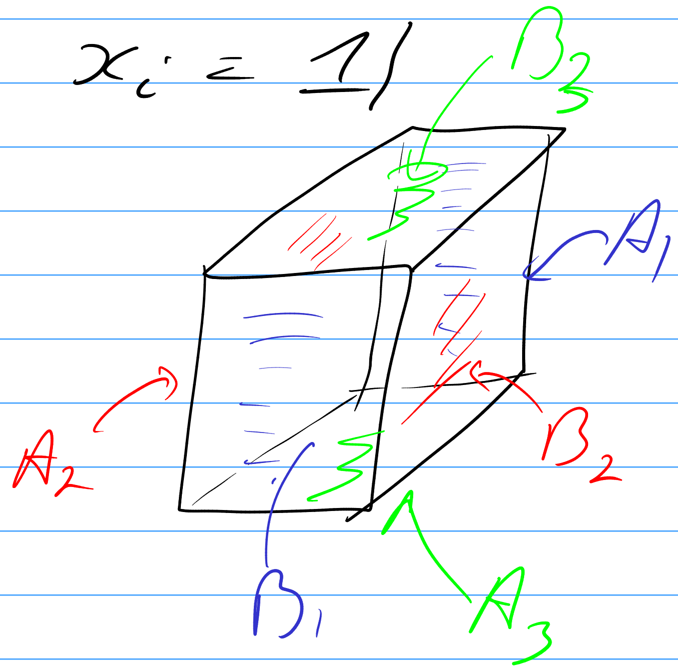
$$\bigcap_{i=1}^{n} P_i \neq \emptyset .$$

DAT ZULLEN ZIJN

$A_i = \{ \underline{x} : x_i = 0 \}$

$B_i = \{ \underline{x} : x_i = 1 \}$





DIE ZIJKANTEN ZIJN EIGENLIJK DE ENIGE KEUZE.

STEL ER IS EEN METRISCHE RUIMTE X MET $\dim X \geq n$.

DAN KUN JE BEWIJZEN DAT DE ZIJKANTEN VAN $[0,1]^n$ AAN $\circledast$ VOLDOEN.

IN X ZIJN ER DAN PAREN $(F_1, G_1), \ldots, (F_n, G_n)$ DISJ. GESL. VERZ'N ZÓ DAT VOOR ALLE RIJEN PARTITIES $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_n$ ($\mathcal{S}_i$ TUSSEN F_i EN G_i) GELDT $\mathcal{S}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{S}_n \neq \emptyset$

$$f_i : X \longrightarrow [0,1]$$

$$f_i(x) = \frac{d(x, F_i)}{d(x, F_i) + d(x, G_i)}$$

$$f_i(x) = 0 \quad (x \in F_i)$$
$$f_i(x) = 1 \quad (x \in G_i)$$

$$f : X \longrightarrow [0,1]^n$$
$$x \longmapsto (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$$

$$f[F_i] \subseteq A_i$$
$$f[G_i] \subseteq B_i$$

STEL P_i IS EEN PARTITIE TUSSEN A_i EN B_i

$$[0,1]^n \setminus P_i = U_i \cup V_i$$

U_i, V_i OPEN $A_i \subseteq U_i$, $B_i \subseteq V_i$

$$U_i \cap V_i = \emptyset$$

DAN GELDT

$$F_i \subseteq f^{-1}[U_i]$$

$$G_i \subseteq f^{-1}[V_i]$$

$$Q_i = X \setminus (f^{-1}[U_i] \cup f^{-1}[V_i])$$

$$= f^{-1}[P_i]$$

Q_i IS EEN PART. TUSSEN F_i EN G_i.

DUS $\bigcap_{i=1}^{n} Q_i \neq \emptyset$

DUS OOK $\bigcap_{i=1}^{n} P_i \neq \emptyset$.

DE PAREN $(A_1, B_1) \ldots (A_n, B_n)$ VORMEN EEN ESSENTIËLE FAMILIE IN $[0,1]^n$.