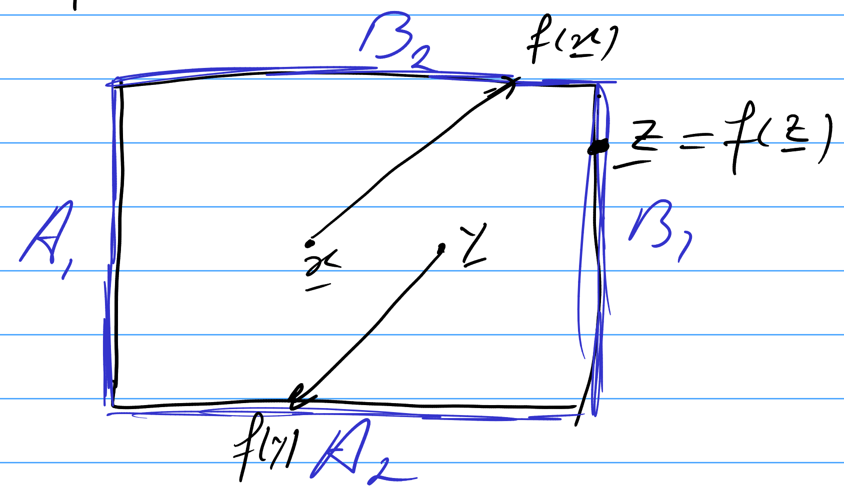
OPWEG NAAR $\dim [0,1]^n \geq n$.

(1) $A_i = \{ \underline{x} \in [0,1]^n : x_i = 0 \}$
$B_i = \{ \underline{x} \in [0,1]^n : x_i = 1 \}$
TE BEWIJZEN VOOR ELKE RIJ PARTITIES $P_1, P_2, \ldots, P_n$ (P_i TUSSEN A_i EN B_i) GELDT $\bigcap_{i=1}^n P_i \neq \emptyset$

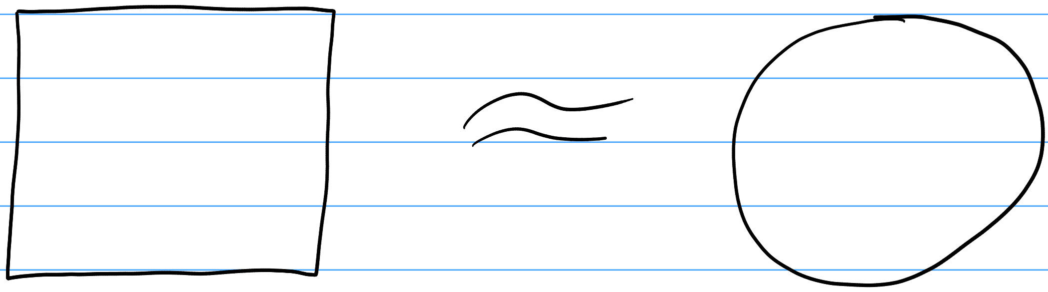
(2) VOOR ELKE CONTINUE $f : [0,1]^n \to [0,1]^n$ IS ER EEN $\underline{x}$ MET $f(\underline{x}) = \underline{x}$

(3) EQUIVALENT MET (2) IS DIT
ER IS <u>GEEN</u> CONTINUE FUNCTIE $f : [0,1]^n \to [0,1]^n$
MET
- $f[[0,1]^n] \subseteq \bigcup_{i=1}^n (A_i \cup B_i)$
- $f(\underline{x}) = \underline{x}$ voor $\underline{x} \in \bigcup_{i=1}^n (A_i \cup B_i)$

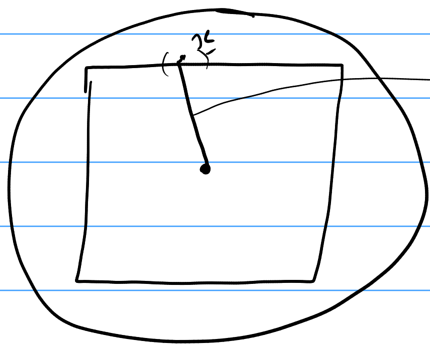


$n = 1$ NIET $f(1) = 1$ PLUS $f(0) = 0$ GEEFT VIA TUSSENW. ST. DAT f SURJECTIEF IS.

WAAROM EQUIVALENT?



$[0,1]^n$ $\qquad\qquad$ $\{\underline{x} : \|\underline{x}\| \leq 1\}$

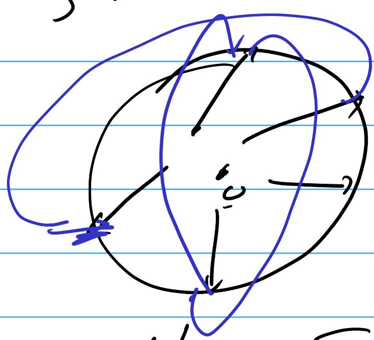


$t\underline{x} \longrightarrow \frac{t}{\|\underline{x}\|}\underline{x}$

IS CONTINU
DE INVERSE OOK
((COMPACTHEID
+ BIJECTIE)

② $\Longleftrightarrow$ ③ EQUIVALENT VOOR DE BOL.

$\neg$③ $\Rightarrow$ $\neg$②



STEL $f : B^n \to S^{n-1}$
IS CONTINU
$f(\underline{x}) = \underline{x}$ $\quad (\underline{x} \in S^{n-1})$

$B^n = \{\underline{x} : \|\underline{x}\| \leq 1\}$ $\qquad$ $S^{n-1} = \{\underline{x} : \|\underline{x}\| = 1\}$

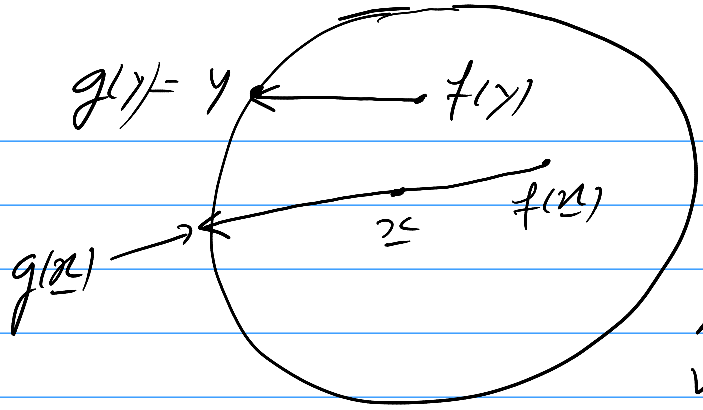
NEEM $g(\underline{x}) = -f(\underline{x})$

NU GELDT $g(\underline{x}) \neq \underline{x}$
VOOR ALLE $\underline{x}$

$\neg$② $\Rightarrow$ $\neg$③ $\quad$ STEL

$$f : B^n \longrightarrow B^n$$

IS CONTINU MET $f(\underline{x}) \neq \underline{x}$

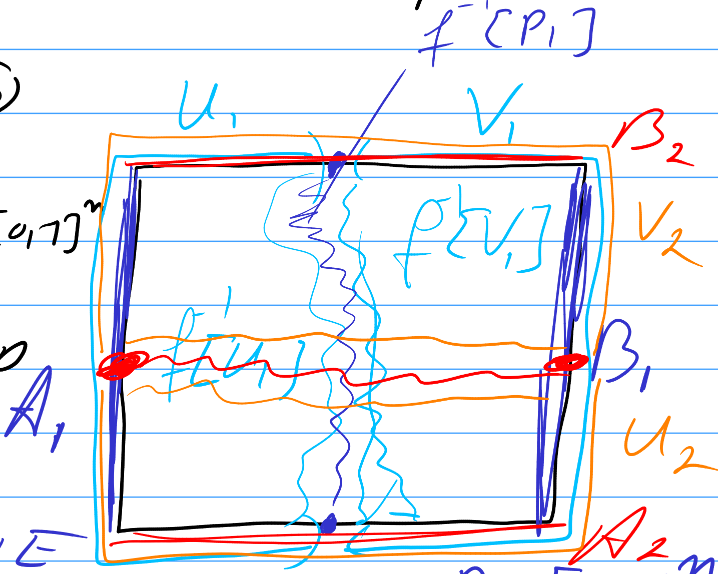


OPGAVE
BEDENK
EEN
FORMULE
VOOR $g(\underline{x})$

③ HEET WEL
"THE NO-RETRACTION THEOREM"

② IS BROUWER'S DEKPUNTSTELLING

① IMPLICEERT ③

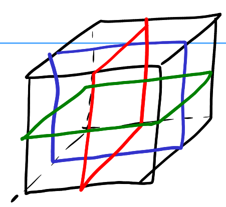


STEL $f : [0,1]^n \to Rd[0,1]^n$
IS CONTINU EN
$f(\underline{x}) = \underline{x}$ OP DE RAND

$P_1 = \{(\frac{1}{2},0),(\frac{1}{2},1)\}$
IS EEN PARTITIE
TUSSEN A_1 EN B_1 IN $Rd[0,1]^n$

$f^{-1}[U_1]$ IS OPEN IN $[0,1]^n$
$f^{-1}[V_1]$ OOK
EN $A_1 \subseteq f^{-1}[U_1]$, $B_1 \subseteq f^{-1}[V_1]$
DUS $f^{-1}[P_1]$ IS EEN PART.
TUSSEN A_1 EN B_1

IDEM VOOR A_2 EN B_2: WE
KRIJGEN $f^{-1}[P_2]$ PART. TUSSEN
A_2 EN B_2 · P_1



MAAR $P_1 \cap P_2 = \emptyset$

DUS $f^{-1}[P_1] \cap f^{-1}[P_2] = \emptyset$

TEGENSPRAAK

(OF $\neg ③ \Rightarrow \neg ①$)

② (OF ③) IMPLICEERT ①

$\neg ① \Rightarrow \neg ②$ OF $\neg ③$

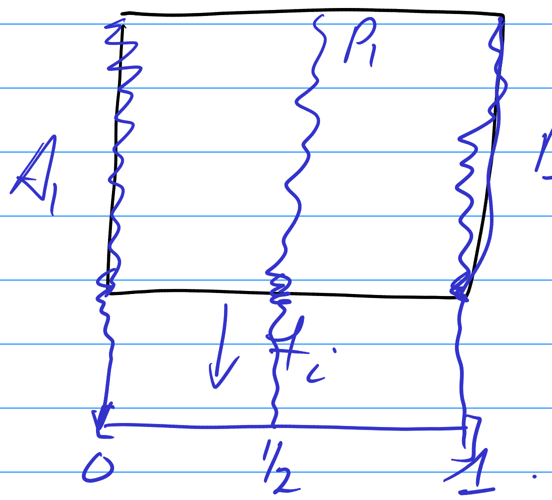
STEL WE HEBBEN WEL PARTITIES $P_1, P_2, \ldots, P_n$ MET

$$\bigcap_{i=1}^{n} P_i = \emptyset$$

OPGAVE MAAK CONTINUE FUNCTIES

$$f_i : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$$

MET
$$f_i(\underline{x}) = 0 \qquad \underline{x} \in A_i$$
$$f_i(\underline{x}) = 1/2 \Longleftrightarrow \underline{x} \in P_i$$
$$f_i(\underline{x}) = 1 \qquad \underline{x} \in B_i$$



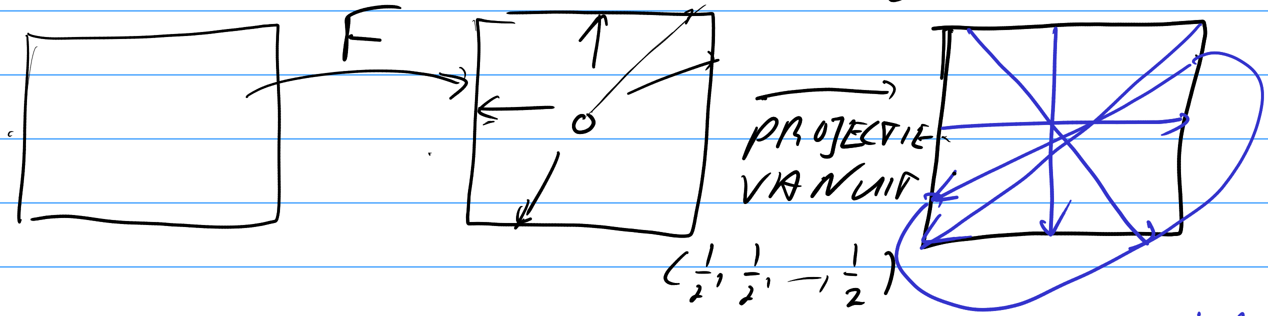
DEFINIEER $F:[0,1]^n \longrightarrow [0,1]^n$

DOOR $F(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), f_2(\underline{x}), \ldots, f_n(\underline{x}))$

ER GELDT NU

$F(\underline{x}) \neq (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$ VOOR ALLE $\underline{x}$.

ZO'N PUNT ZOU IN $\bigcap_{i=1}^{n} P_i$ ZITTEN



VERVOLGENS SPIEGELEN IN $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2})$

DE RESULTERENDE

$f:[0,1]^n \longrightarrow [0,1]^n$

HEEFT GEEN

DEKPUNTEN

DAT GELDT

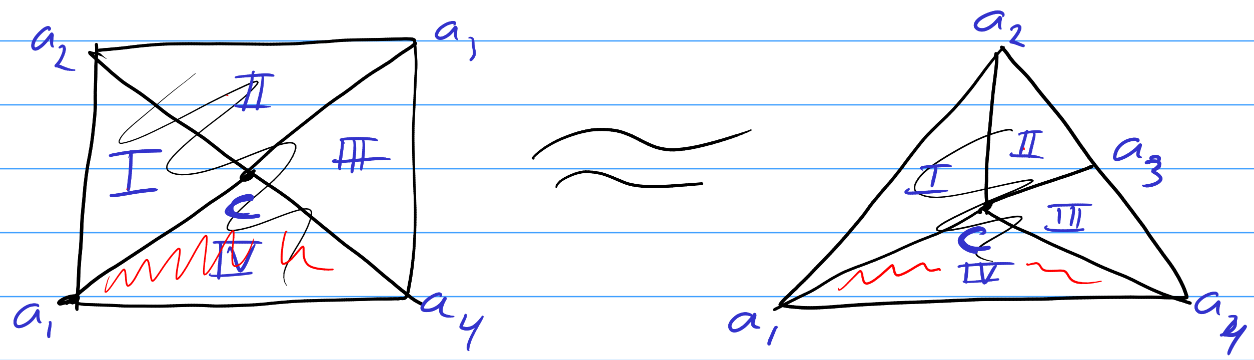
DUS

$\neg (1) \Rightarrow \neg (2)$

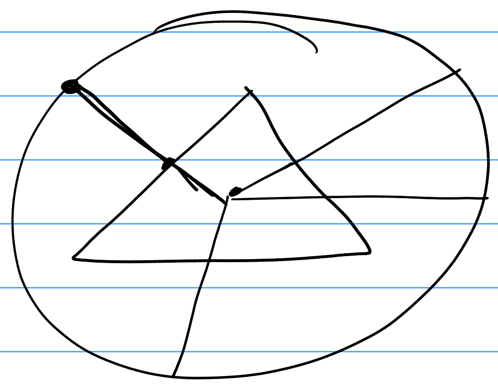
WE GAAN ② BEWYZEN.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \neg ② \arrow[rr, Leftrightarrow] & & \neg ③ \arrow[dl, Rightarrow] \\ & \neg ① \arrow[ul, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

WE WERKEN NIET MET KUBUSSEN MAAR MET SIMPLICES.



DIT KAN OOK VIA DE BOL.

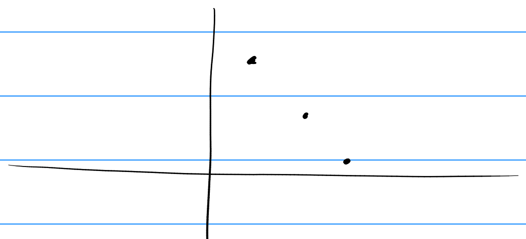


SIMPLICES

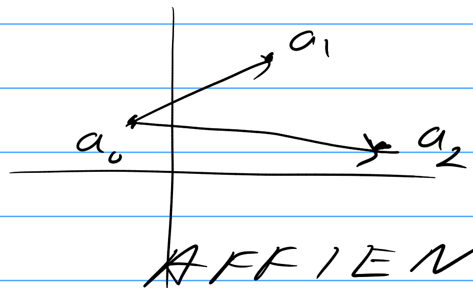
$\{\underline{a}_0, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k\}$ IN $\mathbb{R}^n$
ZIJN <u>AFFIEN</u> <u>ONAFHANKELIJK</u>
OF <u>IN ALGEMENE LIGGING</u>
ALS HET STELSEL
$\{\underline{a}_1 - \underline{a}_0, \underline{a}_2 - \underline{a}_0, \ldots, \underline{a}_k - \underline{a}_0\}$
LINEAIR ONAFH. IS.

LEMMA

$\{\underline{a}_0, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k\}$ IS <u>AFFIEN</u> <u>ONAFH.</u>
D.E.S.D.A.
UIT $\lambda_0 \underline{a}_0 + \lambda_1 \underline{a}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{a}_k = 0$
<u>EN</u> $\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 0$
VOLGT $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$



AFFIEN AFH.



AFFIEN ONAFH.

STEL $\{\underline{a}_0, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k\}$ IS AFFIEN ONAFH.

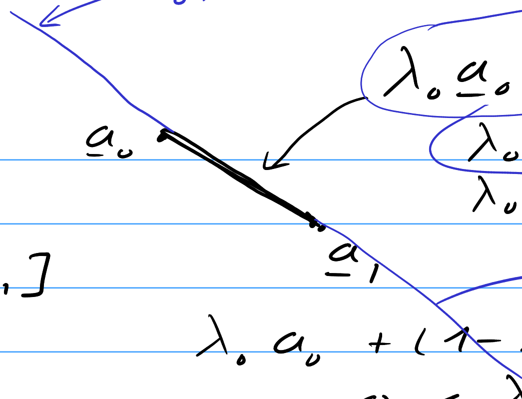
HET <u>SIMPLEX</u> OPGESPANNEN DOOR DIE PUNTEN BESTAAT UIT ALLE PUNTEN $\lambda_0 \underline{a}_0 + \lambda_1 \underline{a}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{a}_k$
MET $\lambda_0 \geq 0, \lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_k \geq 0$
EN $\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1$

$\lambda_0 \geq 0 \quad \lambda_1 < 0$

$k = 1$

SIMPLEX :

LIJNSTUK $[\underline{a}_0, \underline{a}_1]$



$\lambda_0 \underline{a}_0 + \lambda_1 \underline{a}_1$

$\lambda_0 + \lambda_1 = 1$

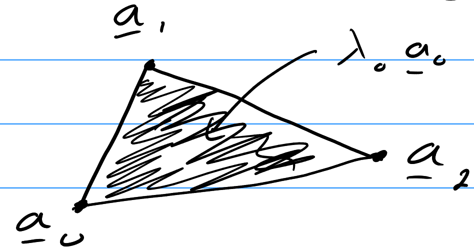
$\lambda_0, \lambda_1 \geq 0$

$\lambda_0 < 0 \quad \lambda_1 \geq 0$

$\lambda_0 a_0 + (1 - \lambda_0) \underline{a}_1$

$0 \leq \lambda_0 \leq 1$

$k = 2$

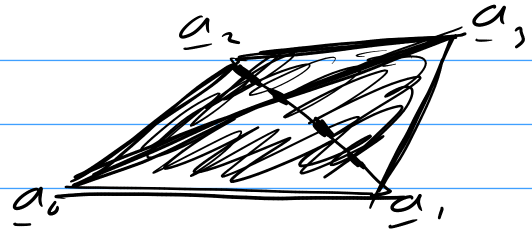


$\lambda_0 \underline{a}_0 + \lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2$

$\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$

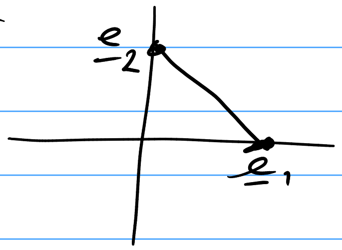
$k = 3$



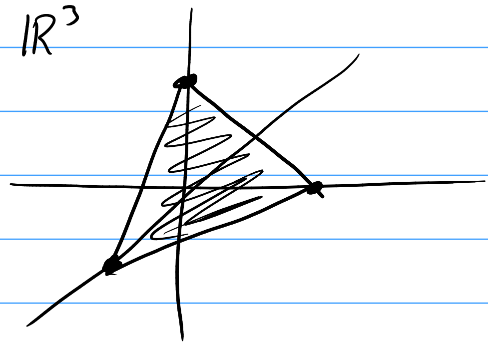
TETRAËDER

STANDAARD SIMPLICES

$\mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^3$



NOTATIE : $[\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n]$

ALS $f : [\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n] \longrightarrow [\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n]$ CONTINU IS DAN KIJKEN WE NAAR

$F_i = \{ \underline{x} : \lambda_i(\underline{x}) \geq \lambda_i(f(x)) \}$

- GESLOTEN

$\Longrightarrow$ - $\bigcap_{i=0}^{n} F_i \neq \emptyset$ --- $\underline{x}$ IN DOORSNEDE

$\lambda_i(\underline{x}) \geq \lambda_i(f(\underline{x}))$ ALLE i

PLUS DAT BEIDE OPTELLEN TOT 1

DAT GEEFT $\lambda_i(\underline{x}) = \lambda_i(f(x))$ ALLE i

DUS $\underline{x} = f(\underline{x})$.