AM 3590   2020-09-18

$\underline{a}_0, \dots, \underline{a}_k$ IN $\mathbb{R}^n$

AFFIEN ONAFHANKELIJK

ALS UIT $\lambda_0 \underline{a}_0 + \dots + \lambda_k \underline{a}_k = 0$

EN $\lambda_0 + \dots + \lambda_k = 0$

VOLGT $\lambda_0 = \dots = \lambda_k = 0$

$k = 2$: $\underline{a}_0 \neq \underline{a}_1$

$k = 3$: NIET OP EEN LIJN

$k = 4$: NIET IN EEN VLAK

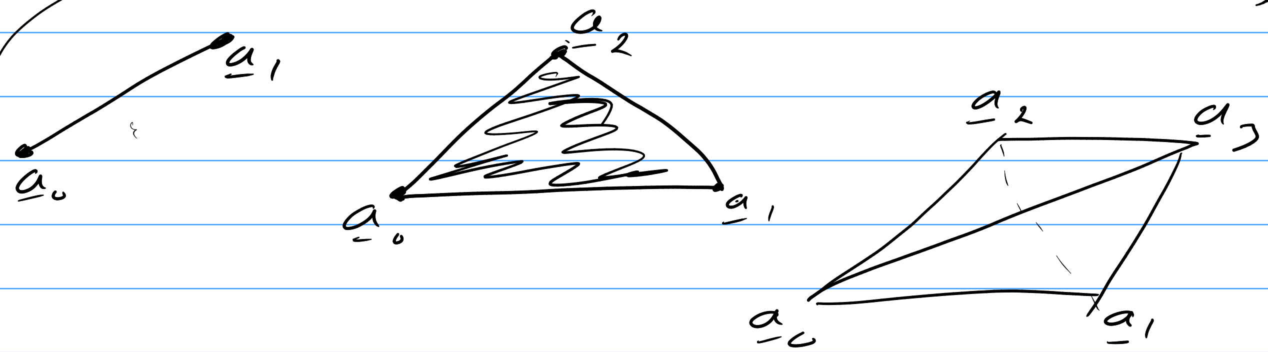
EQUIVALENT:

$\underline{a}_1 - \underline{a}_0, \dots, \underline{a}_k - \underline{a}_0$

LINEAIR ONAFH.

$[\underline{a}_0, \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_k] =$

$\{ \lambda_0 \underline{a}_0 + \lambda_1 \underline{a}_1 + \dots + \lambda_k \underline{a}_k : \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 1, \ \lambda_i \geq 0 \}$



EEN CONVEXE COMBINATIE VAN DE $\underline{a}_i$

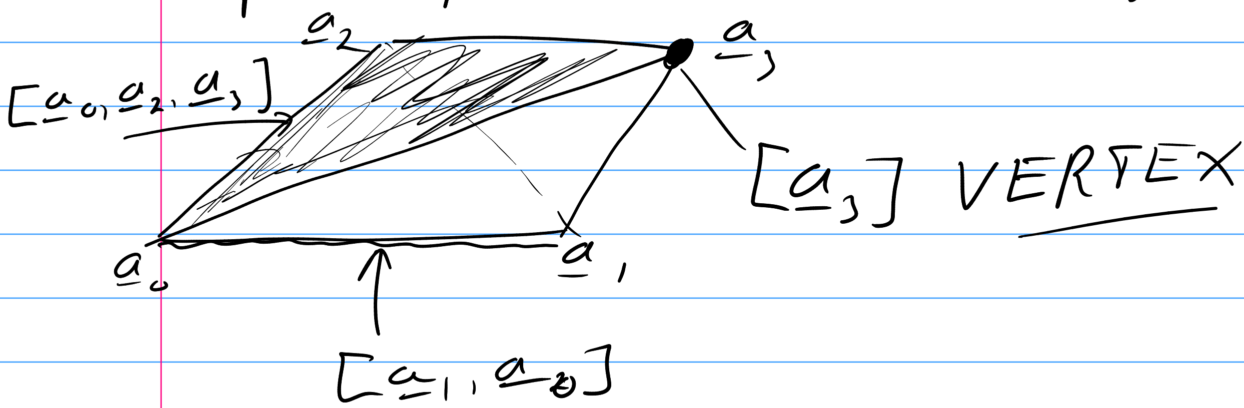
C CONVEX ALS VOOR $x, y \in C$ OOK $[x, y] \subseteq C$

$\{a_{i_0}, \ldots, a_{i_\ell}\} \subseteq \{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$

DAN HEET $[a_{i_0}, \ldots, a_{i_\ell}]$

EEN ZIJKANT (FACET) VAN $[a_0, \ldots, a_k]$

$[a_0, \ldots, a_k]$ IS HET k-SIMPLEX OPGESPANNEN DOOR $a_0, \ldots, a_k$.



LEMMA:

ALS $x \in [a_0, a_1, \ldots, a_k]$

EN $x = \lambda_0 a_0 + \cdots + \lambda_k a_k$

$= \mu_0 a_0 + \cdots + \mu_k a_k$

MET $\lambda_0 + \cdots + \lambda_k = 1 = \mu_0 + \cdots + \mu_k$.

DAN $\lambda_0 = \mu_0, \ldots, \lambda_k = \mu_k$

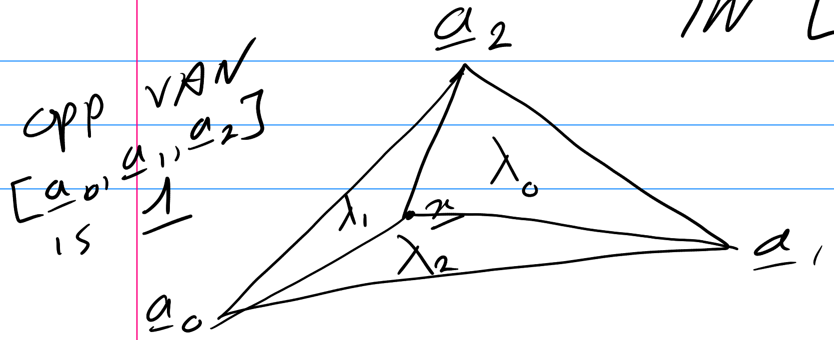
DE λ's HETEN DE

BARYCENTRISCHE

COÖRDINATEN

VAN x

IN $[a_0, \ldots, a_k]$



STELLING.

$[a_0, a_1, \ldots, a_k]$ IS COMPACT
EN DE COÖRDINAATFUNCTIES
ZIJN CONTINU.

COMPACT: GESLOTEN EN BEGRENSD

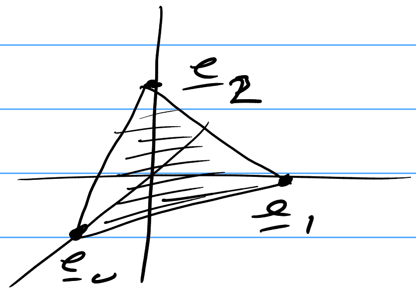
OPGAVE

$\mathrm{DIAM}[a_0, \ldots, a_k] = \mathrm{DIAM}\{a_0, \ldots, a_k\}$

STANDAARD k-SIMPLEX

$\sigma = [e_0, e_1, \ldots, e_k]$ IN $\mathbb{R}^{k+1}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



BARYC. COÖRD'N $\equiv$ COÖRD'N IN $\mathbb{R}^{k+1}$
VOOR DIT SIMPLEX ZIJN DE
COÖRD. FUNCTIES ZEKER CONTINU.

$$f : \sigma \longrightarrow [a_0, a_1, \ldots, a_k]$$
$$x \longmapsto x_0 a_0 + x_1 a_1 + \ldots + x_k a_k$$

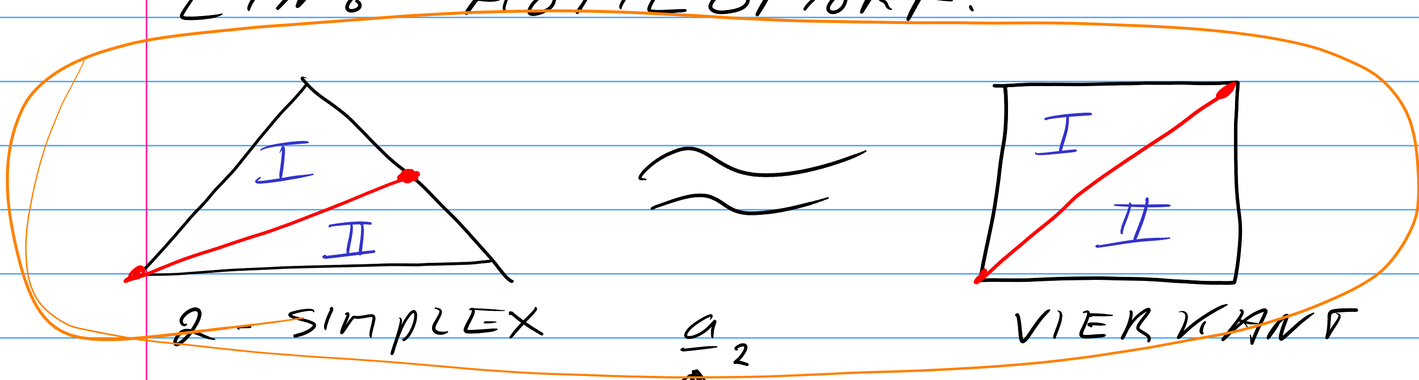
LIN ALG:
- f IS SURJECTIEF
- f IS CONTINU
- f IS INJECTIEF

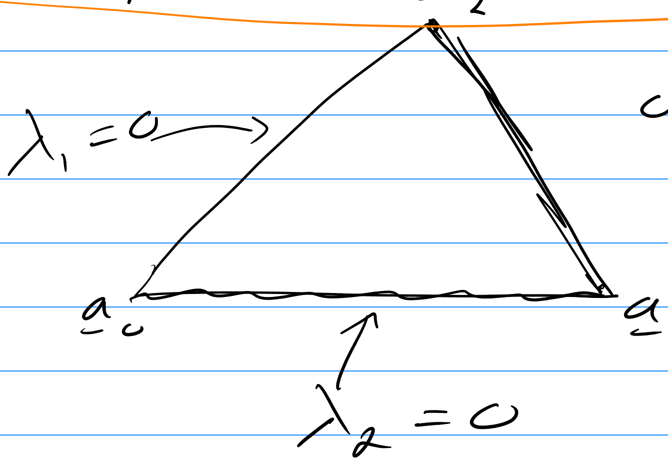
f IS EEN CONTINUE BIJECTIE,
σ IS COMPACT DUS
$f^{-1} : [a_0, \ldots, a_k] \longrightarrow \sigma$
IS CONTINU

$$f^{-1}(x) = (\lambda_0(x), \lambda_1(x), \ldots, \lambda_k(x))$$

LIN ALG: MAAK FORMULES VOOR $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

ALLE k-SIMPLICES ZIJN ONDERLING HOMEOMORF.

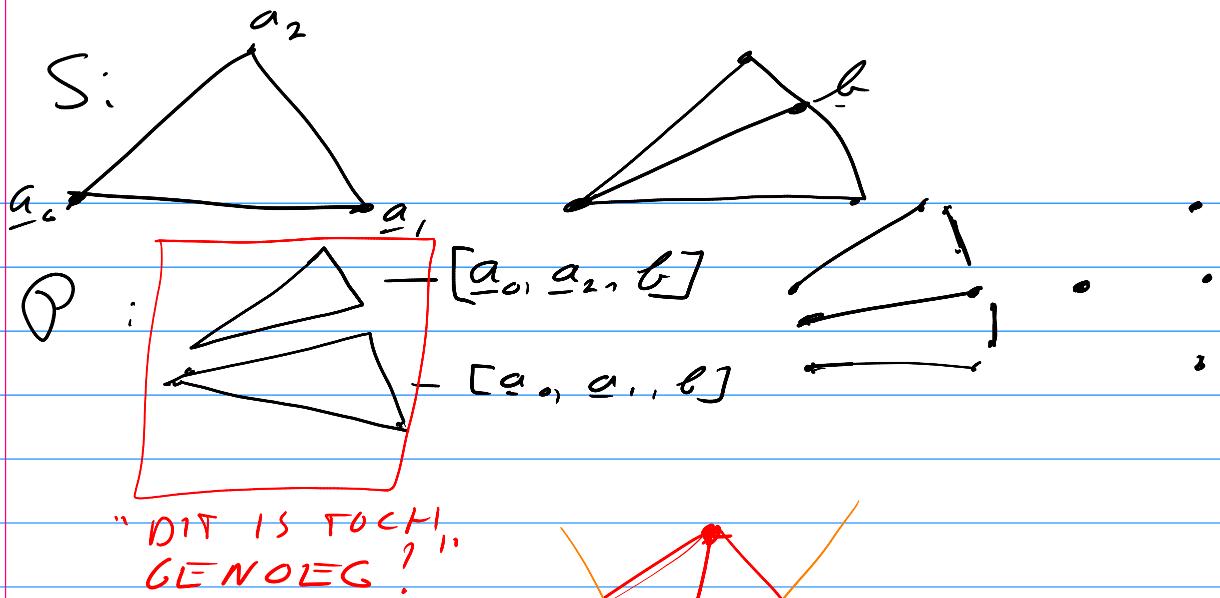


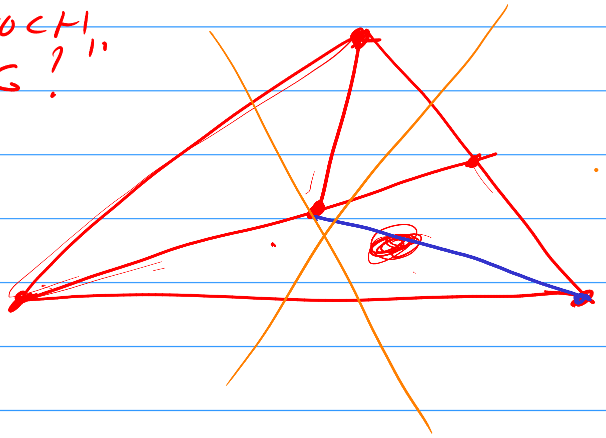


ONDERVERDELINGEN

EEN ONDERVERDELING VAN EEN SIMPLEX S IS EEN COLLECTIE SIMPLICES $\mathcal{P}$

- $\mathcal{P}$ IS EINDIG
- $S = \cup \mathcal{P}$
- ALS $p, q \in \mathcal{P}$ DAN $p \cap q = \emptyset$ OF $p \cap q$ IS EEN ZIJKANT VAN p EN q
- ALS $p \in \mathcal{P}$ DAN ZIT OOK ELKE ZIJKANT VAN p IN $\mathcal{P}$



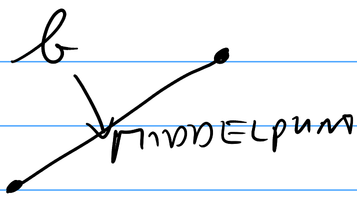


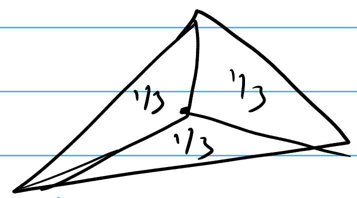
MAASWYDTE: $\max\{\operatorname{diam}(P) : P \in \mathcal{P}\}$

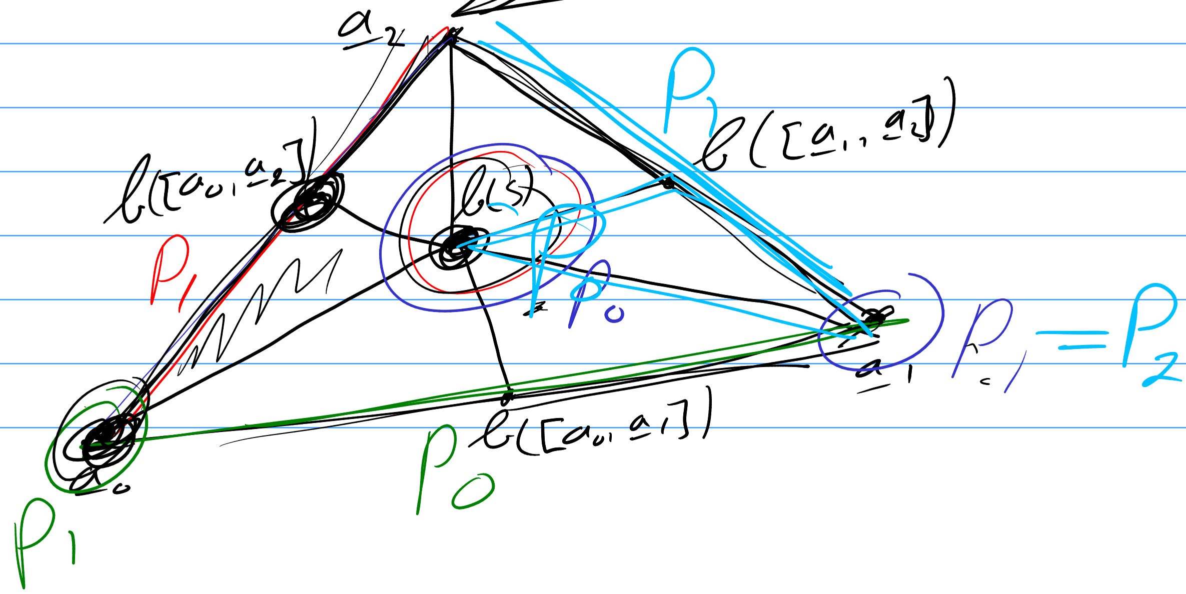
BARYCENTRUM VAN $[a_0, a_1, \ldots, a_k]$

BARYS = ZWAAR, KENTRON = CENTRUM

$$b(S) = \frac{1}{k+1} a_0 + \frac{1}{k+1} a_1 + \cdots + \frac{1}{k+1} a_k$$







BARYCENTRISCHE ONDERVERDELING.

$S = [a_0, a_1, \ldots, a_k]$

NEEM EEN RIJ(TJE) ZIJKANTEN

$$P_0 \supseteq P_1 \supset \cdots \supset P_\ell$$

DAN IS DE RIJ BARYCENTERS

$$b(P_0), b(P_1) \cdots b(P_\ell)$$

AFFIEN ONAFHANKELIJK.

ZBDA: $\ell = k$

DUS $P_0 = S$ EN $P_k = \{a_i\}$

$$P_i \supset P_{i+1}$$

$F_i \subseteq \{0, 1, \ldots, k\}$ $\quad F_{i+1} \subseteq \{0, 1, \ldots, k\}$

DAN GELDT $F_i \supset F_{i+1}$

HIER KAN IK VERZAMELINGEN TUSSEN ZETTEN:

STEL $F_i \setminus F_{i+1} = \{p, q, r\}$

$$F_i \supset F_{i+1} \cup \{p, q\} \supset F_i \cup \{p\} \supset F_i$$

ZO KRIJGEN WE

$$\{0, 1, \ldots, k\} = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_k = \{a_p\}$$

EEN PUNT VERSCHIL

$\{b(P_0), \ldots, b(P_\ell)\}$ IS EEN DEEL-VERZ VAN

$$\{b(S), b(G_1), \ldots, a_p\}$$

VOOR HET GEMAK:

$$G_i \setminus G_{i+1} = \{i\}$$

$$b(P_0) = \frac{1}{k+1}\underline{a}_0 + \frac{1}{k+1}\underline{a}_1 + \cdots + \frac{1}{k+1}\underline{a}_k$$

$$b(P_1) = \frac{1}{k}a_1 + \cdots + \frac{1}{k}a_k$$

$$b(P_2) = \frac{1}{k-1}\underline{a}_2 + \cdots + \frac{1}{k-1}a_k$$

$$\vdots$$

$$b(P_k) = \underline{a}_k$$

STEL $\mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_k = 0$

$$\mu_0 b(P_0) + \mu_1 b(P_1) + \cdots + \mu_k b(P_k) = 0$$

$$\mu_0 \frac{1}{k+1} a_0 + \left(\mu_0 \frac{1}{k+1} + \mu_1 \frac{1}{k}\right)\underline{a}_1 - \left(\mu_0\frac{1}{k+1} + \mu_1\frac{1}{k}\right)\underline{a}_0$$

$$+ \left(\mu_0 \frac{1}{k+1} + \mu_1 \frac{1}{k} + \mu_2 \frac{1}{k-1}\right)\underline{a}_2 \quad (-)\ \underline{a}_0$$

$$\vdots$$

$$\left(\mu_0 \frac{1}{k+1} + \cdots + \mu_k\right)\underline{a}_k = 0$$

DUS $\mu_0 \frac{1}{k+1} = 0$, $\left(\mu_0 \frac{1}{k+1} + \mu_1 \frac{1}{k}\right) = 0$

$\mu_0 \frac{1}{k+1} + \mu_1 \frac{1}{k} + \mu_2 \frac{1}{k-1} = 0$ ETC

IK KRIJG SOM V.D. COËFF:

$$\frac{k+1}{k+1}\mu_0 + \frac{k}{k}\mu_1 + \frac{k-1}{k-1}\mu_2 + \cdots + \mu_k = 0$$

$$\mu_0 \frac{1}{k+1} \quad a_0$$

$$+ \left(\mu_0 \frac{1}{k+1} + \mu_1 \frac{1}{k}\right)\left(\underline{a}_1 - \underline{a}_0\right)$$

$$+ \left(\mu_0 \frac{1}{k+1} + \mu_1 \frac{1}{k} + \mu_2 \frac{1}{k-1}\right)\left(\underline{a}_2 - \underline{a}_0\right)$$

$$\vdots$$

$$\left(\mu_0 \frac{1}{k+1} + \mu_1 \frac{1}{k} + \cdots + \mu_k\right)\left(\underline{a}_k - \underline{a}_0\right)$$

DE ONAFH VAN $\underline{a}_0, \ldots, \underline{a}_k$ GEEFT NU

$\mu_0 \frac{1}{k+1} = 0$ $\qquad \mu_0 = 0$

$\mu_0 \frac{1}{k+1} + \mu_1 \frac{1}{k} = 0$ —— $\mu_1 = 0$

$\vdots$

$\mu_k = 0$

DE BARYCENTRISCHE ONDERVERDELING

BESTAAT UIT ALLE SIMPLICES DIE WE ZO KRIJGEN

$$[b(P_0), \ldots, b(P_l)]$$

MET $P_0 \supset P_1 \supset \cdots \supset P_l$ ZIJKANTEN VAN S

$[b(P_0)]$ $\quad [b(P_0), b(P_1)]$

ELKE PERMUTATIE φ VAN $\{0, 1, 2, \ldots, k\}$ LEVERT EEN NIEUW k-SIMPLEX

$$[a_{\varphi(0)}, a_{\varphi(1)}, \ldots, a_{\varphi(k)}] \supset$$

$$[a_{\varphi(1)}, \ldots, a_{\varphi(k)}] \supset$$

$$\vdots$$

$$[a_{\varphi(k)}]$$

WEL NOG NETJES BEWIJZEN DAT DIT EEN ONDERVERDELING IS.

WAT IS ZIJN MAASWIJDTE?