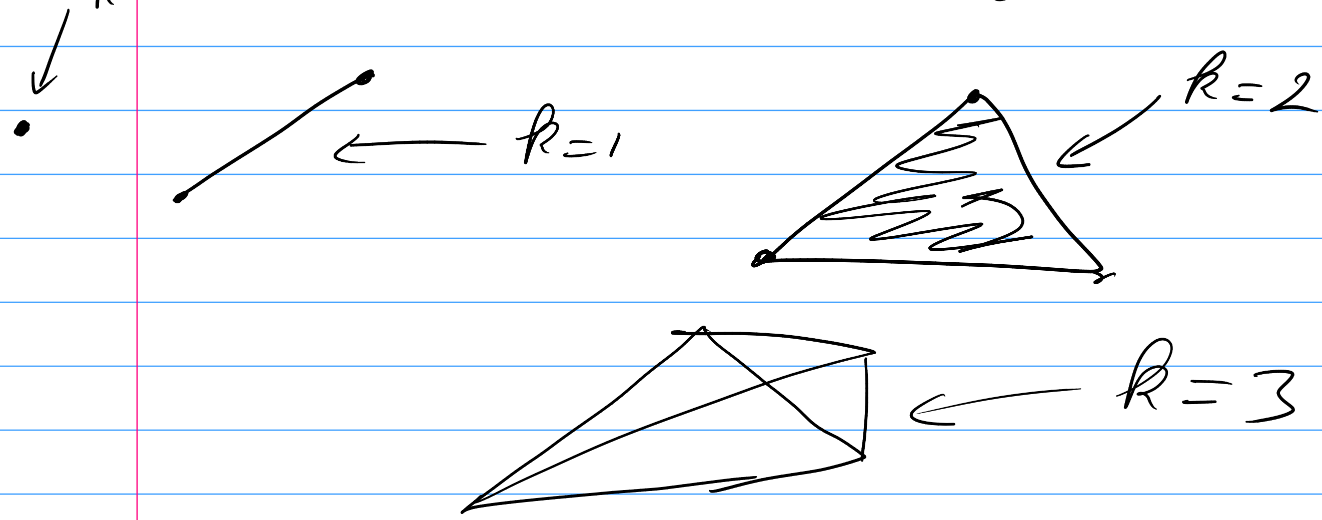
AM 3590 2020-09-22

WE HEBBEN $k+1$ PUNTEN IN $\mathbb{R}^n$: $a_0, a_1, \ldots, a_k$.

IN ALGEMENE LIGGING
AFFIEN ONAFHANKELYK

$$S = [a_0, a_1, \ldots, a_k] =$$

$$= \left\{ \underline{x} : \begin{array}{l} \underline{x} = \lambda_0 \underline{a}_0 + \lambda_1 \underline{a}_1 + \cdots + \lambda_k \underline{a}_k \\ \lambda_0 + \lambda_1 + \cdots \lambda_k = 1 \\ \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \geq 0 \end{array} \right\}$$



BARYCENTRISCHE ONDERVERDELING

$$b(S) = \frac{1}{k+1}(\underline{a}_0 + \underline{a}_1 + \cdots + \underline{a}_k)$$

ALS $P_0 \supset P_1 \supset \cdots \supset P_\ell$ EEN RIJ ZIJKANTEN IS (FACETTEN) DAN IS $b(P_0), b(P_1), \ldots, b(P_\ell)$ AFFIEN ONAFH.

WE KUNNEN DE RIJ UITBREIDEN TOT

$$S = \varphi_0 \supset \varphi_1 \supset \cdots \supset \varphi_k$$

ZODAT ER EEN PERMUTATIE $\{i_0, i_1, \ldots, i_k\}$ VAN $\{0, 1, \ldots, k\}$ IS MET

$$\varphi_j = [\underline{a}_{i_j}, \underline{a}_{i_{j+1}}, \ldots, \underline{a}_{i_k}]$$

$$b(\varphi_0) = \frac{1}{k+1}\underline{a}_{i_0} + \frac{1}{k+1}\underline{a}_{i_1} + \cdots + \frac{1}{k+1}\underline{a}_{i_k}$$

$$b(\varphi_1) = \frac{1}{k}\underline{a}_{i_1} + \cdots + \frac{1}{k}\underline{a}_{i_k}$$

$$b(\varphi_j) = \frac{1}{k+1-j}\left(\underline{a}_{i_j} + \cdots + \underline{a}_{i_k}\right)$$

$$b(\varphi_k) = \frac{1}{1}\underline{a}_{i_k}$$

BARYCENTRISCHE ONDERVERD.

ALLE SIMPLICES VAN DE VORM $[b(P_0), \ldots, b(P_\ell)]$ VOOR RIJTJES $P_0 \supset P_1 \supset \cdots \supset P_\ell$ VAN ZIJKANTEN. LENGTE 1

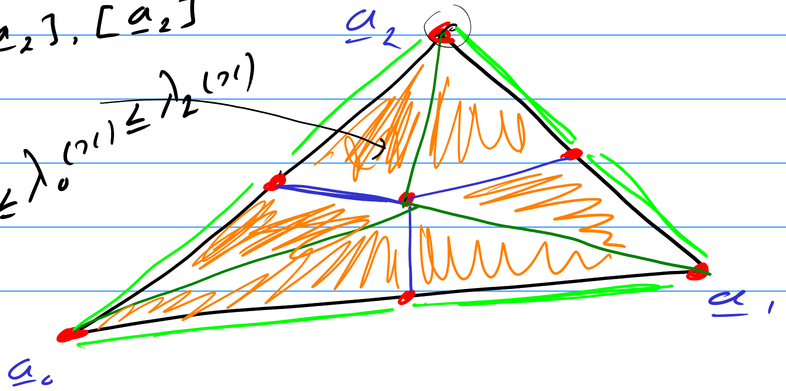
$S, [\underline{a}_0, \underline{a}_2], [\underline{a}_2]$

$i_0 = 1$ ~~0~~

$i_1 = 2$ ~~0~~

$i_2 = $

$\lambda_1^{(x)} \leq \lambda_0^{(x)} \leq \lambda_2^{(x)}$



S

$[a_0, a_1]$,

$[\underline{a}_1, \underline{a}_2]$

$[\underline{a}_2, \underline{a}_0]$

$[\underline{a}_0]$

$[\underline{a}_1]$

$[\underline{a}_2]$

LENGTE 2: $S \supset [\underline{a}_i, \underline{a}_j]$

$\quad\quad\quad\quad 0 \quad 2$

$S \supset [\underline{a}_i]$

$[\underline{a}_i, \underline{a}_j] \supset [\underline{a}_i]$

LENGTE 3 $S \supset [\underline{a}_i, \underline{a}_j] \supset [\underline{a}_j]$

WE HEBBEN EEN ONDERVERDELING

- EINDIG: TEL MAAR
- DE VERENIGING IS HEEL S

WE NEMEN EEN PERMUTATIE $\{i_0, i_1, \dots, i_k\}$ VAN $\{0, 1, \dots, k\}$ STELLEN

$$P_j = [i_j, \dots, i_k]$$

EN BEKYKEN

$$\sigma = [b(P_0), b(P_1), \dots, b(P_k)]$$

$$\underline{x} \in \sigma \iff \lambda_{i_0}(x) \leq \lambda_{i_1}(x) \leq \dots \leq \lambda_{i_k}(x)$$

$$\uparrow$$

$$\underline{x} = \mu_0 b(P_0) + \mu_1 b(P_1) + \dots + \mu_k b(P_k)$$

$$(\text{MET } \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k \geq 0$$
$$\mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_k = 1)$$

$$= \mu_0 \cdot \tfrac{1}{k+1} \underline{a}_{i_0} + \left(\mu_0 \tfrac{1}{k+1} + \mu_1 \tfrac{1}{k}\right) \underline{a}_{i_1}$$

$$\left(\mu_0 \tfrac{1}{k+1} + \mu_1 \tfrac{1}{k} + \mu_2 \tfrac{1}{k-1}\right) \underline{a}_{i_2}$$

$$\ddots$$

$$\overset{!}{=} \lambda_{i_0}(x) \underline{a}_{i_0} + \lambda_{i_1}(x) \underline{a}_{i_1} + \dots + \lambda_{i_k}(x) \underline{a}_{i_k}$$

$$\mu_0 \frac{1}{k+1} = \lambda_{i_0}$$

$$\mu_0 \frac{1}{k+1} + \mu_1 \frac{1}{k} = \lambda_{i_1}$$

$$\mu_0 \frac{1}{k+1} + \mu_1 \frac{1}{k} + \mu_2 \frac{1}{k-1} = \lambda_{i_2}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{k+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{k+1} & \frac{1}{k} & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \frac{1}{k-1} & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{k+1} & \frac{1}{k} & \frac{1}{k-1} & & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_0 \\ \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{i_0} \\ \lambda_{i_1} \\ \vdots \\ \lambda_{i_k} \end{pmatrix}$$

$\mu_i \geq 0$ $\qquad \underline{\lambda_{i_k} - \lambda_{i_{k-1}}}$

$= \left(\frac{1}{k+1}\mu_0 + \cdots + \frac{1}{2}\mu_{k-1} + \mu_k\right)$
$- \left(\frac{1}{k+1}\mu_0 + \cdots + \frac{1}{2}\mu_{k-1}\right) = \underline{\underline{\mu_k}} \geq 0$

$\lambda_{i_k} \geq \lambda_{i_{k-1}} \qquad \frac{1}{\cdots}\mu_j = \lambda_{i_j} - \lambda_{i_{j-1}}$

IDEM: $0 \leq \frac{1}{2}\underline{\mu_{k-1}} = \underline{\lambda_{i_{k-1}} - \lambda_{i_{k-2}}}$

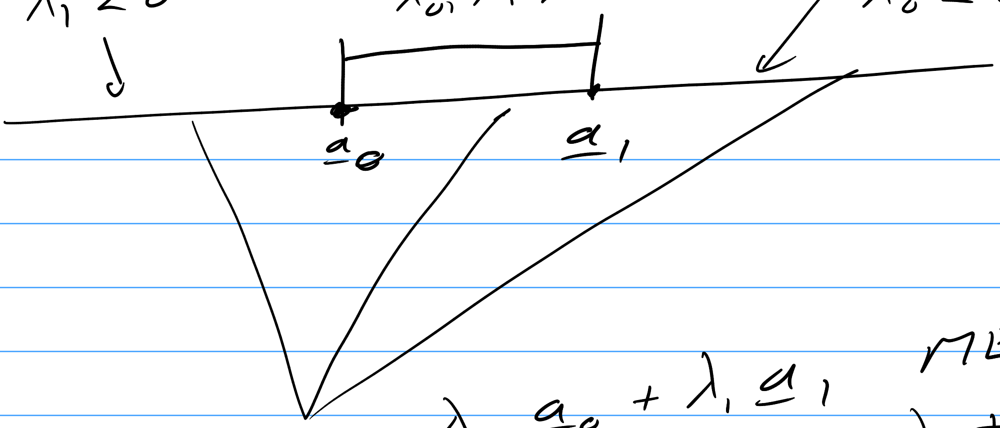
DIT BEWYST $\Longrightarrow$

HET BEWYST OOK $\Longleftarrow$

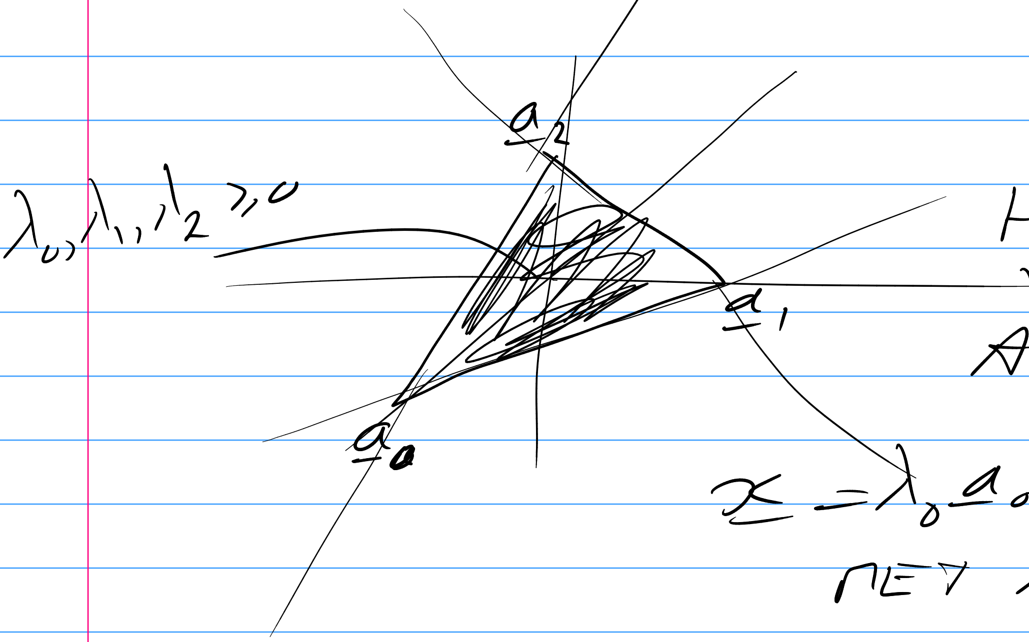
ALS $\lambda_{i_0} \leq \lambda_{i_1} \leq \cdots \leq \lambda_{i_k}$

DAN BEWYST DIT

$\mu_0 \geq 0 \quad \mu_1 \geq 0 \quad \cdots \quad \mu_k \geq 0$



$\underline{x} = \lambda_0 \underline{a}_0 + \lambda_1 \underline{a}_1$ MET $\lambda_0 + \lambda_1 = \underline{1}$



HET VLAK VOLDOET AAN

$\underline{x} = \lambda_0 \underline{a}_0 + \lambda_1 \underline{a}_1 + \lambda_2 \underline{a}_2$
MET $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = \underline{1}$

WAAROM IS DE VERENIGING HEEL S ?

ALS $\underline{x} \in S$ DAN IS ER EEN PERMUTATIE MET $\lambda_{i_0}(x) \leq \lambda_{i_1}(x) \leq \cdots \leq \lambda_{i_k}(x)$

KUNNEN WE
$\sigma = [b(P_0), b(P_1), \ldots, b(P_e)]$
BETER BESCHRYVEN ?
LIEFST IN TERMEN VAN DE λ_i

ER IS EEN PERMUTATIE
ZÓ DAT

$$P_0 \supset P_1 \supset \cdots \supset P_k$$

EEN DEELRY IS VAN

$$\cdot\ Q_0 \supset Q_1 \supset \cdots \supset Q_k$$

$$Q_j = [a_{i_j}, \ldots, a_{i_k}]$$

IN DE SCHRYFWYZE

$$\sigma \ni \underline{x} = \mu_0 \ell(Q_0) + \mu_1 \ell(Q_1) + \cdots + \mu_k \ell(Q_k)$$

ZYN DE μ_i DIE NIET
BY EEN P HOREN
GELYK AAN <u>NUL</u>

WANT ALS

$$\underline{x} = \nu_0 \ell(P_0) + \cdots + \nu_\ell \ell(P_\ell)$$

DAN <u>IS</u> DIT OOK EEN
COMB. VAN $\ell(Q_0), \ldots, \ell(Q_k)$

WAT BETEKENT

$$\mu_j = 0\ ?$$

$$\lambda_{i_j} - \lambda_{i_{j-1}} = 0 : \quad \lambda_{i_j} = \lambda_{i_{j-1}}$$

($j = 0$: $\mu_0 = 0$ BETEKENT $\lambda_{i_0} = 0$)

DE RIJ $P_0 \supset P_1 \supset \ldots \supset P_\ell$

IS EEN DEELRIJ

$$\varphi_{j_0} \supset \varphi_{j_1} \supset \ldots \supset \varphi_{j_\ell}$$

VAN $\varphi_0 \supset \varphi_1 \supset \ldots \supset \varphi_k$

$\mu_j = 0$ ALS $j \notin \{j_0, \ldots, j_\ell\}$

$\lambda_{i_j} = \lambda_{i_{j-1}}$ ALS $j \notin \{j_0, \ldots, j_\ell\}$

EN $\lambda_{i_0} = 0$ ALS $0 \notin \{j_0, \ldots, j_\ell\}$

EN OMGEKEERD!

ZO KARAKTERISEREN WE DE $[\ell(P_0), \ldots, \ell(P_\ell)]$

$$0 \leq \lambda_{i_0}(x) \leq \lambda_{i_1}(x) \leq \ldots \leq \lambda_{i_n}(x)$$

OUIDELYK: ELK FACET VAN $[\ell(P_0), \ldots, \ell(P_\ell)]$ ZIT OOK IN DE ONDERVERDELING.

ALS σ_1 EN σ_2 IN DE ONDERVERDELING ZITTEN

DAN $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$

OF $\sigma_1 \cap \sigma_2$ IS ZYKANT VAN BEIDE

σ_1 HOORT BIJ PERMUTATIE

$\{i_0, i_1, \ldots, i_k\}$ EN

DEELVERZ. F

DUS $0 \le \lambda_{i_0}(x) \le \lambda_{i_1}(x) \le \cdots \le \lambda_{i_k}(x)$

$j \notin F$: $\lambda_{i_j} = \lambda_{i_{j-1}}$

$0 \notin F$ $\lambda_{i_0} = 0$

σ_2 IDEM $\{j_0, j_1, \ldots, j_k\}$

EN G

Opgave: MAAK HIERUIT

EEN PERMUTATIE $\{t_0, t_1, \ldots, t_k\}$

EN EEN $H \subseteq \{0, 1, \ldots, k\}$

ZÓ DAT

$\sigma_1 \cap \sigma_2$ DOOR DIE

PERMUTATIE EN H BEPAALD

WORDT.

$x \in \sigma_1 \cap \sigma_2$:

$0 \le \lambda_{i_0}(x) \le \lambda_{i_1}(x) \le \cdots \le \lambda_{i_k}(x)$

$0 \le \lambda_{j_0}(x) \le \lambda_{j_1}(x) \le \cdots \le \lambda_{j_k}(x)$

- STEL $\sigma = [b(P_0), \ldots, b(P_k)]$ IS EEN $k-1$ - SIMPLEX IN DE ONDERVERDELING.

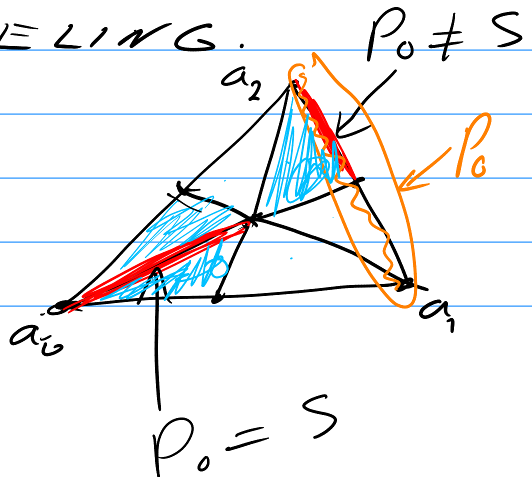
- $P_0 \neq S$

  DAN ZIT σ IN P_0

  EN P_0 IS EEN

  $k-1$ - DIM ZIJKANT

  VAN S



σ IS ZYKANT VAN EEN
k-SIMPLEX IN DE ONDERVERD.
NAMELYK
$$[\, b(S), b(P_0), \ldots, b(P_k) \,]$$

- $P_0 = S$
  WE HEBBEN BIJV
  $P_0 = [\underline{a}_0, \underline{a}_1, \underline{a}_2]$ $\qquad P_1 = [\underline{a}_0]$
  DIE KUNNEN WE op PRECIES
  TWEE MANIEREN UITBREIDEN

$$P_0 \supset [\underline{a}_0, \underline{a}_1] \supseteq [\underline{a}_0]$$

$$P_0 \supset [\underline{a}_0, \underline{a}_2] \supseteq [\underline{a}_0]$$

DUS IS σ ZYKANT VAN
PRECIES TWEE k-SIMPLICES
IN DE ONDERVERDELING.

ALGEMEEN: ER IS EEN
PERMUTATIE $\{ i_0, i_1, \ldots, i_k \}$
EN ÉÉN j ZÓ DAT
σ BEPAALD WORDT
DOOR $\lambda_{i_j} = \lambda_{i_{j-1}}$

(OPGAVE: GANA)