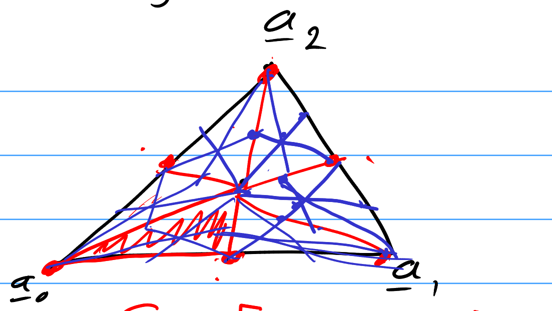
AM3590 2020-09-29 (1)



$$S = [a_0, a_1, \ldots, a_k]$$

$$b(S) = \frac{1}{k+1}(\underline{a}_0 + \underline{a}_1 + \ldots + \underline{a}_k)$$

$S \supset [\underline{a}_0, \underline{a}_1] \supset [\underline{a}_0]$

VOOR ELKE RIJ $P_0 \supset P_1 \supset \ldots \supset P_\ell$
VAN ZIJKANTEN IS
$$[b(P_0), b(P_1), \ldots, b(P_\ell)]$$
WEER EEN SIMPLEX.

DE FAMILIE VAN DIE SIMPLICES NOEMEN WE DE (EERSTE) BARYCENTRISCHE ONDERVERDELING VAN S.

(1) HUISWERK

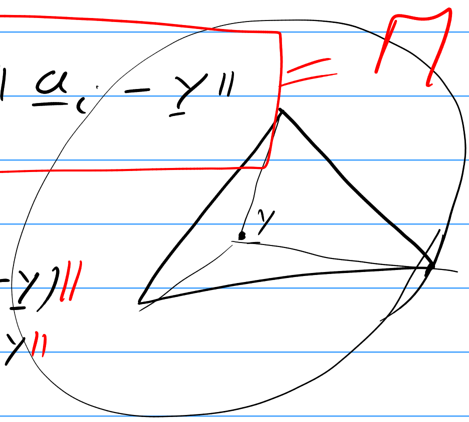
$$\mathrm{DIAM}([\underline{a}_0, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k]) = \mathrm{DIAM}(\{\underline{a}_0, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k\})$$

$\geqslant$: DUIDELIJK

$\leqslant$ NEEM $\underline{x}, \underline{y}$ IN $[\underline{a}_0, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k]$

DAN GELDT

$$\|\underline{x} - \underline{y}\| \leq \boxed{\max_{i \leq k} \|\underline{a}_i - \underline{y}\|} = M$$



$$\|\underline{x} - \underline{y}\| = \|\lambda_0 \underline{a}_0 + \lambda_1 \underline{a}_1 + \ldots + \lambda_k \underline{a}_k - \underline{y}\|$$
$$= \|\lambda_0(\underline{a}_0 - \underline{y}) + \lambda_1(\underline{a}_1 - \underline{y}) + \ldots + \lambda_k(\underline{a}_k - \underline{y})\|$$
$$\leq |\lambda_0| \, \|\underline{a}_0 - \underline{y}\| + \ldots + |\lambda_k| \, \|\underline{a}_k - \underline{y}\|$$
$$\leq (\lambda_0 + \ldots + \lambda_k) M$$
$$= M$$

IDEM $\|\underline{a}_i - \underline{y}\| \leq \max_{j \leq k} \|\underline{a}_i - \underline{a}_j\|$

$$= \mathrm{DIAM}(\{\underline{a}_0, \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_k\})$$

MAASWYDTE: $\max\{\operatorname{diam}(p) : p$ in onderverd.$\}$

LEMMA

DE MAASWYDTE VAN DE BARYC. ONDERVERD. IS KLEINER DAN OF GELYK AAN

$$\frac{k}{k+1}\operatorname{diam}(S).$$

(DRIEHOEK MAASW. $\leq \frac{1}{2}\operatorname{diam}(\Delta)$)

NEEM EEN PERMUTATIE $\{i_0, i_1, \ldots, i_k\}$ VAN $\{0, 1, \ldots, k\}$

BEKYK GEGEVEN $l < m \leq k$

$b([\underline{a}_{i_0}, \ldots, \underline{a}_{i_l}])$ EN $b([\underline{a}_{i_0}, \ldots, \underline{a}_{i_m}])$

$$\underline{b}_1 = \frac{1}{l+1}(\underline{a}_{i_0} + \cdots + \underline{a}_{i_l})$$

$$\underline{b}_2 = \frac{1}{m+1}(\underline{a}_{i_0} + \cdots + \underline{a}_{i_l} + \cdots + \underline{a}_{i_m})$$

$\underline{b}_1$ EN $\underline{b}_2$ ZITTEN IN $[\underline{a}_{i_0}, \ldots, \underline{a}_{i_m}]$

DUS

$$\|\underline{b}_1 - \underline{b}_2\| \leq \max_{j \leq m} \|\underline{a}_{i_j} - \underline{b}_2\|$$

$$\|\underline{a}_{i_j} - \underline{b}_2\| = \|\underline{a}_{i_j} - \frac{1}{m+1}(\underline{a}_0 + \cdots + \underline{a}_{i_j} + \cdots + \underline{a}_{i_m})\|$$

$$= \|\underbrace{\frac{1}{m+1}(\underline{a}_{i_j} - \underline{a}_{i_0}) + \cdots + \frac{1}{m+1}\cdot\underline{0} + \cdots + \frac{1}{m+1}(\underline{a}_{i_j} - \underline{a}_{i_m})}_{\text{EIGENLYK } m \text{ TERMEN}}\|$$

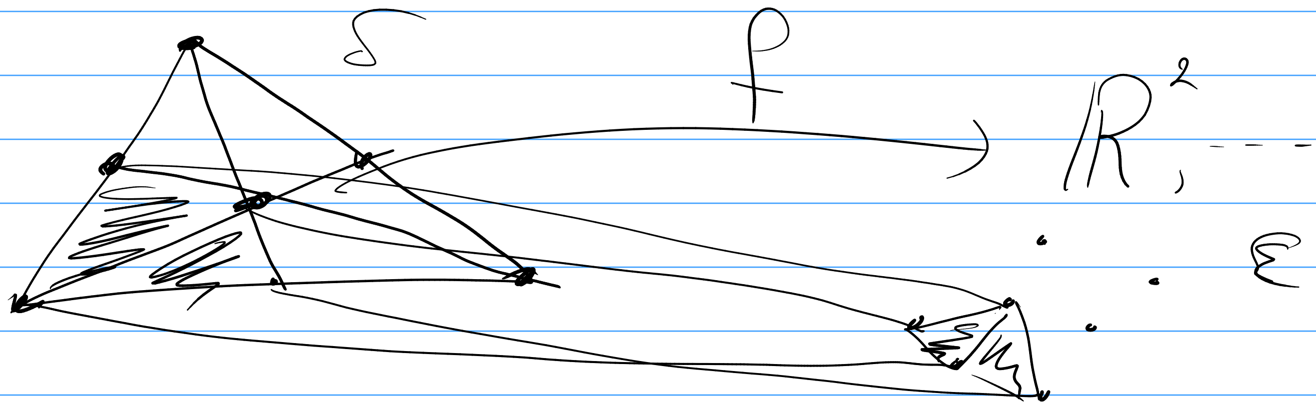
$$\leq \frac{1}{m+1}(\operatorname{diam}(S) + \cdots + \operatorname{diam}(S))$$

$$= \frac{m}{m+1}\operatorname{diam}(S)$$

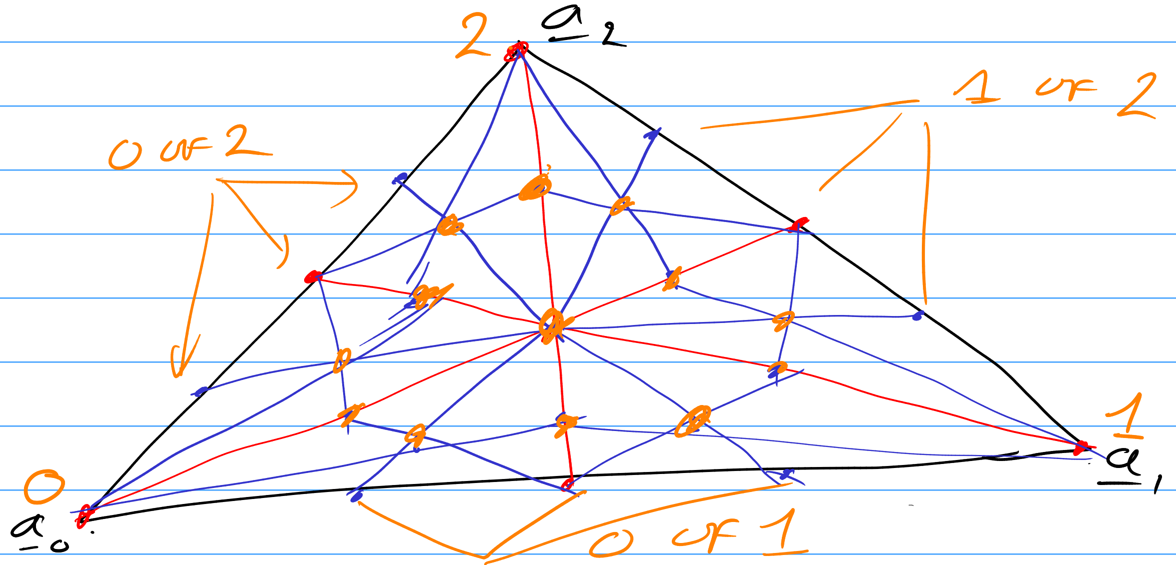
$$\leq \frac{k}{k+1}\operatorname{diam}(S) \quad \square$$

GEVOLG:
VOOR ELKE $\varepsilon > 0$ IS ER EEN BARYCENTRISCHE ONDERVERD. MET MAASWYDTE KLEINER DAN ε.

DIT LAAT TOE WILLEKEURIGE CONTINUE FUNCTIES TE BENADEREN MET STUKSGEWYS LINEAIRE FUNCTIES
"SIMPLICIALE BENADERINGEN"



COMBINATORIEK (TELLEN)



LABELINGEN VAN HOEKPUNTEN

ELK PUNT KRIJGT LABEL

- 0, 1, OF 2
- a_i KRIJGT KLEUR i
- IN $[a_i, a_j]$: KLEUR i OF j
- IN $[a_0, a_1, a_2]$: VRIJ

ER IS ALTIJD EEN <u>ONEVEN</u> AANTAL SIMPLICES DAT ALLE DRIE KLEUREN KRIJGT
(I.H.B. IS ER DUS EENTJE)

OFFICIEEL:

S EEN k-SIMPLEX

$\mathcal{P}$ EEN BARYCENTRISCHE ONDERVERDELING.

V DE VERZ HOEKPUNTEN

EEN LABELING

$$L : V \longrightarrow \{0, 1, 2, \ldots, k\}$$

IS <u>GOED</u>

ALS GELDT:

ALS v IN $[a_{i_0},\dots,a_{i_\ell}]$ LIGT

DAN $L(v)\in\{i_0,\dots,i_\ell\}$

IHB $L(a_i)=i$

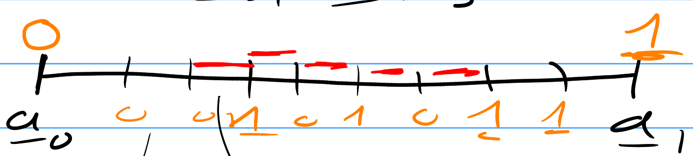
ALS v op $[a_i,a_j]$ LIGT

DAN $L(v)\in\{i,j\}$

$k=0$: $[a_0]$ $L(a_0)=0$

EEN VOL SIMPLEX

$k=1$ $[a_0,a_1]$



VIJF VOLLE SIMPLICES

$a_0, x_1, x_2, \dots, x_p, a_1$

$0 \qquad\qquad 1$

$$1=\overbrace{L(x_1)-L(a_0)}^{0}+\overbrace{L(x_2)-L(x_1)}^{0}+\overbrace{L(x_3)-L(x_2)}^{1}$$
$$\dots+\underbrace{L(x_p)-L(x_{p-1})}_{0}+\underbrace{L(a_1)-L(x_p)}_{0}$$

EEN 1-TJE MEER DAN HET AANTAL -1-EN

TOTAAL ONEVEN AANTAL 1-EN EN -1-EN

LEMMA VAN SPERNER

BIJ ELKE GOEDE LABELING IS HET AANTAL VOLLE k-SIMPLICES IN DE ONDERVERDELING ONEVEN

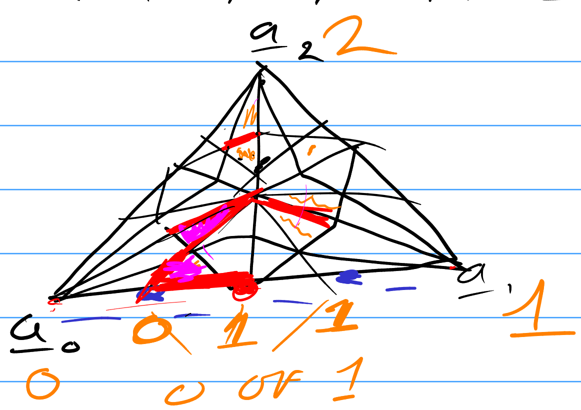
INDUCTIE NAAR $k = \dim S$

$k=0$ NIKS TE BEWIJZEN
HET AANTAL IS 1

$k=1$ HEBBEN WE NET GEZIEN.

$k \to k+1$

NEEM $S = [a_0, a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}]$
EEN BARYC. ONDERVERD. σ
EN
$L: V \longrightarrow \{0, 1, \ldots, k, k+1\}$
DIE GOED IS.



BEKIJK DE FUNCTIE

$\ell : V \cap [a_0, \ldots, a_k] \to \{0, \ldots, k\}$

DE BEPERKING VAN L.

ℓ IS EEN GOEDE LABELING VOOR DE BIJBEH. BARYC. ONDERVERD. VAN $[a_0, \ldots, a_k]$

$\overset{!}{\nabla}$ IN $[a_0, \ldots, a_k]$ IS ER EEN ONEVEN AANTAL k-SIMPLICES DIE VOLLEDIG GELABELD ZIJN.

L_1: DE VOLLE SIMPLICES VOOR ℓ IN $[a_0, \ldots, a_k]$
(L_1 HEEFT EEN ONEVEN AANTAL ELEMENTEN)

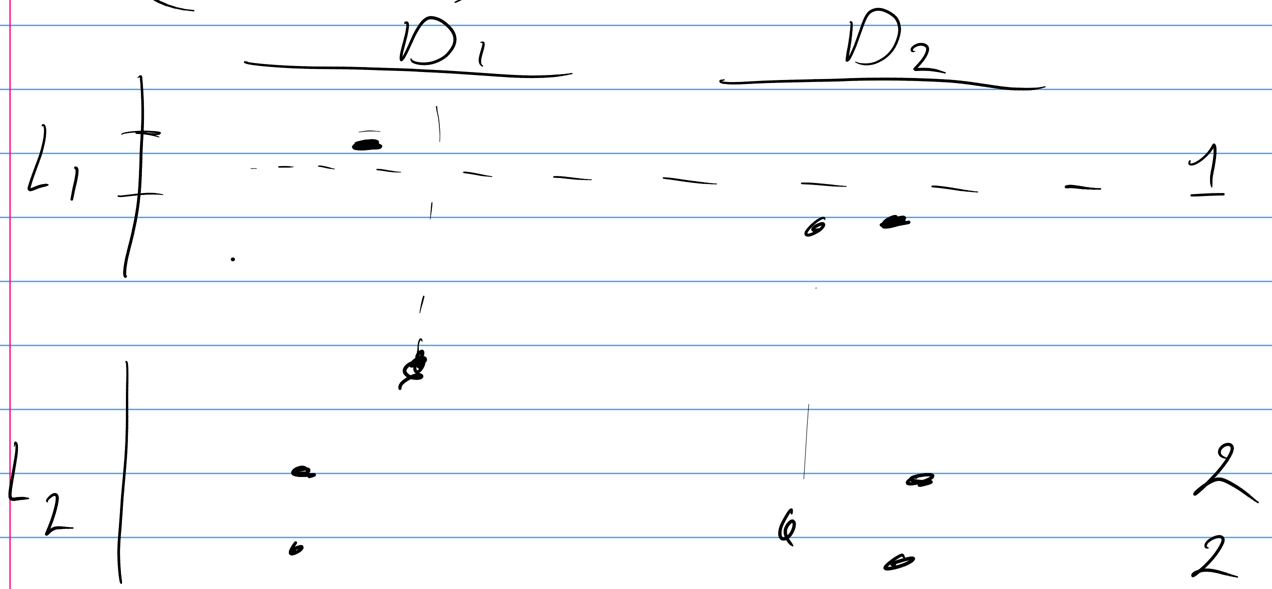
L_2: DE k-DIM SIMPLICES IN P DIE NIET IN $[a_0, \ldots, a_k]$ LIGGEN MAAR WEL ALLE LABELS IN $\{0, \ldots, k\}$ AANNEMEN

D_1: DE VOLLE $k+1$-SIMPLICES IN P
(WE WILLEN: $|D_1|$ IS ONEVEN)

D_2 DE $k+1$-SIMPLICES MET $L(P) = \{0, 1, \ldots, k\}$

BEKYK

$$(L_1 \cup L_2) \times (D_1 \cup D_2)$$



1 2

$$R = \{(L, D) : L \text{ is zykant van } D\}$$

ONEVEN

$$|R| = |L_1| + 2|L_2|$$

$$|R| = |D_1| + 2|D_2|$$

DUS ONEVEN