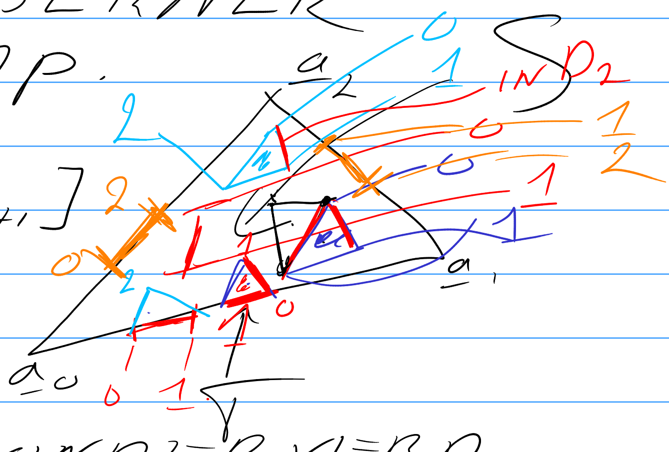
AM 3590 2020-10-01 ①

LEMMA VAN SPERNER
INDUCTIESTAP.



$S = [a_0, a_1, \ldots, a_k, a_{k+1}]$

$T = [a_0, a_1, \ldots a_k]$

$\mathcal{P}$ EEN BARYC. ONDERVERD.
$g: V \longrightarrow \{0, 1, \ldots, k, k+1\}$
EEN GOEDE LABELING.
V: ALLE HOEKPUNTEN VAN SIMPLICES IN $\mathcal{P}$

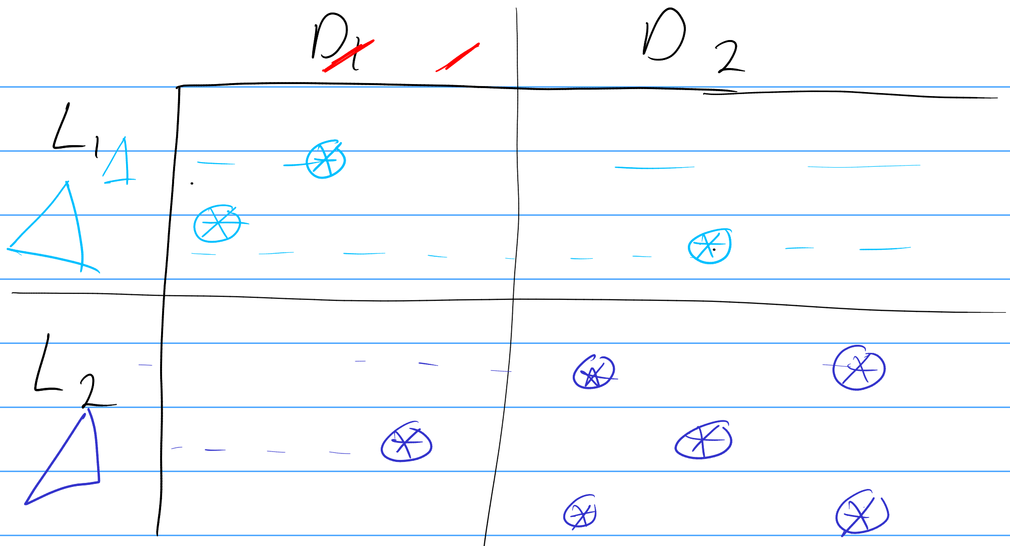
① $g[V \cap T] = \{0, 1, \ldots, k\}$

D_1: DE k-SIMPLICES IN $\mathcal{P}$ DIE IN T LIGGEN EN DIE VOL ZIJN VOOR $h = g|(V \cap T)$.
IND. AANNAME: $|D_1|$ IS ONEVEN

D_2: DE k-SIMPLICES IN $\mathcal{P}$ $\mathcal{Q}$ DIE NIET IN T LIGGEN MAAR DIE WEL VOLDOEN AAN $g[V \cap \mathcal{Q}] = \{0, \ldots, k\}$
DEZE LIGGEN IN HET INWENDIGE NIET IN DE ANDERE ZIJKANTEN

L_1 ALLE $k+1$-SIMPLICES DIE VOL ZIJN VOOR g
WE WILLEN DAT $|L_1|$ ONEVEN

L_2 ALLE $k+1$-SIMPLICES $\mathcal{Q}$ DIE VOLDOEN AAN
$g[V \cap \mathcal{Q}] = \{0, \ldots, k\}$



$\Pi: (D_1 \cup D_2) \times (L_1 \cup L_2)$

$R \subseteq \Pi$ BESTAAT UIT ALLE PAREN (P, Q) MET

P IS ZIJKANT VAN Q

$|R| = |L_1| + 2|L_2|$

$|R| = |D_1| + 2|D_2|$

CONCLUSIE

$$|L_1| - |D_1| = 2(|D_2| - |L_2|)$$

OF $|L_1| \equiv |D_1| \pmod 2$

KLAAR

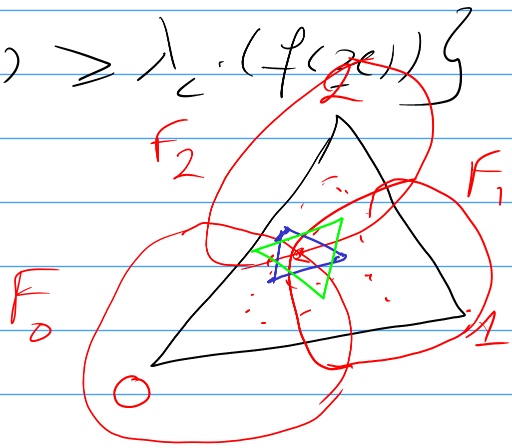
DEKPUNTSTELLING VAN BROUWER

Zij S een k-simplex
$f : S \longrightarrow S$ continu
Dan is er een $x \in S$
met $f(x) = x$.

Bewys
Voor elke i nemen we

$$F_i = \{ \underline{x} : \lambda_i(\underline{x}) \geq \lambda_i(f(\underline{x})) \}$$

F_i is gesloten.



We bewyzen

$$\bigcap_{i=0}^{k} F_i \neq \emptyset \,!$$

x in de doorsnede voldoet aan

$$\lambda_0(x) \geq \lambda_0(f(x)) \ldots\ldots \lambda_k(x) \geq \lambda_k(f(x))$$

omdat

$$\lambda_0(x) + \ldots + \lambda_k(x) = 1$$
$$\lambda_0(f(x)) + \ldots + \lambda_k(f(x)) = 1$$

volgt dan $\lambda_0(x) = \lambda_0(f(x)) \ldots\ldots$
$\ldots\ldots \lambda_k(x) = \lambda_k(f(x))$

dus $\underline{x = f(x)}$

$$\lambda_{i}(\underline{a}_{i}) = 1 \geq \lambda_{i}(f(\underline{a}_{i}))$$

$\underline{a}_i \in F_i$

$x \in [a_i, a_j]$

$x = \lambda_i(x)\, a_i + \lambda_j(x)\, a_j \quad , \lambda_i(x) + \lambda_j(x) = 1$

VERDER

$\lambda_i(f(x)) + \lambda_j(f(x)) \leq 1$

DAN MOET

$\lambda_i(x) \geq \lambda_i f(x)$ OF $\lambda_j(x) \geq \lambda_j(f(x))$

DUS

$x \in F_i \cup F_j$.

ALGEMEEN ALS $x \in [a_{i_0}, \ldots, a_{i_l}]$

DAN $x \in F_{i_0} \cup \cdots \cup F_{i_l}$

IHB $S \subseteq \bigcup_{i=0}^{k} F_k$

NEEM $m \in \mathbb{N}$ EN BEKIJK DE m-DE BARYC. ONDERVERD. $\mathcal{P}_m$ MET HOEKPUNTEN-VERZ. V_m.

$g_m : V_m \longrightarrow \{0, 1, \ldots, k\}$

$x \longmapsto i$ MET $x \in F_i$

ALS $x \in [a_{i_0}, \ldots, a_{i_l}]$

DAN MOET $g_m(x) \in \{i_0, \ldots, i_l\}$

DAT KAN WEGENS ONZE OPMERKINGEN HIERBOVEN.

∇ ER IS DUS EEN SIMPLEX P_m IN $\mathcal{P}_m$ DAT VOL IS VOOR g_m. ∇

DIT BETEKENT DAT

$P_m \cap F_i \neq \emptyset \quad i = 0, \ldots, k$

WE HEBBEN $\langle P_m : m \in \mathbb{N} \rangle$

- $\operatorname{DIAM} P_m \leq \left(\frac{k}{k+1}\right)^m \operatorname{DIAM} S$

$\lim_{m \to \infty} \operatorname{DIAM} P_m = 0$

- DERIJ $\langle b(P_m) : m \in \mathbb{N} \rangle$

HEEFT EEN CONV. DEELRIJ

VOOR HET GEMAK $b(P_m) \longrightarrow x$

NEEM $i \in \{0, \ldots, k\}$

NOEM HET HOEKPUNT VAN P_m

DAT IN F_i ZIT EVEN v_m

$\| v_m - b(P_m) \| \longrightarrow 0$

DUS $v_m \longrightarrow x$

CONCLUSIE $\underline{x \in F_i}$

i WAS WILLEKEURIG! $x \in \bigcap_{i=0}^{k} F_i$

<u>KLAAR</u>

WE HEBBEN DE ST. VAN BROUWER

DUS WETEN WE DAT

IN I^n DE PAREN ZIJKANTEN

$(A_1, B_1), \ldots, (A_n, B_n)$ ZÓ ZIJN

DAT ELKE RIJ PARTITIES
P_i MET P_i TUSSEN A_i EN B_i
VOLDOET AAN $\bigcap_{i=1}^{n} P_i \neq \emptyset$
DUS $\dim I^n \geq n$.

WE WETEN $\dim I^n = n$
EN $\dim \mathbb{R}^n = n$

INVARIANTIE VAN GEBIED

ALS $O \subseteq \mathbb{R}^n$ OPEN IS
EN $h : O \longrightarrow \mathbb{R}^n$
IS EEN HOMEOMORFISME
TUSSEN O EN $h[O]$
DAN IS $h[O]$ OOK OPEN.

$n = 1$ MAKKELIJK VIA TUSSENW. ST.
ALS h CONTINU DIFF'B IS
DAN VOLGT DIT UIT DE
IMPLICIETE-FUNCTIE-STELLING.

ZELFS: ALS $h : O \longrightarrow \mathbb{R}^n$
CONTINU EN INJECTIEF IS
DAN IS $h[O]$ OPEN.

EEN ZWAKKERE VORM

ZIJ $A \subseteq \mathbb{R}^n$ DAN GELDT

$$\dim A \leq n-1 \iff \mathrm{INT}\, A = \emptyset$$

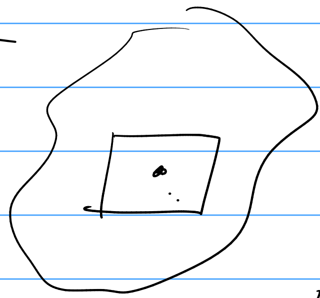
IHB ALS $h: O \to \mathbb{R}^n$ CONTINU EN INJECTIEF IS DAN

$$\mathrm{INT}\, h[O] \neq \emptyset.$$

NEEM $x \in O$ EN EEN

n- KUBUS(JE) K MET

$$x \in K \subseteq O$$



K IS COMPACT

— $h[K]$ IS HOMEOMORF MET K,

DVS $\dim h[K] = n$

DUS $\mathrm{INT}\, h[K] \neq \emptyset$

$\Longleftarrow$ IDEE STAAT HIERBOVEN:

ALS $\mathrm{INT}\, A \neq \emptyset$ DAN ZIT ER EEN n-KUBUS IN A EN DIE GEEFT $\dim A \geq n$.

$\Longrightarrow$ KOST MEER MOEITE

STAP 1

ALS X EEN METRISCHE RUIMTE IS EN $A \subseteq X$

DAN $\dim A \leq \dim X$.

[IN ALGEMENERE RUIMTEN IS $\dim A > \dim X$ MOGELIJK]

Bewys

- WE WETEN HET VOOR GESLOTEN DEELRUIMTEN.
- WE KRIJGEN HET OOK VOOR OPEN DEELRUIMTEN

ALS O OPEN IS DAN IS ER EEN RIJ GESLOTEN VERZ'N $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ MET $O = \bigcup_n F_n$.

$F_n = \{x : d(x, X \setminus O) \geq 2^{-n}\}$

DAN

$$\dim F_n \leq \dim X$$

VOOR ALLE n.

PAS AFT. GESL. SOMSTELLING TOE: $\dim O \leq \dim X$.

- STEL $\dim X = n$ EN LAAT $A \subseteq X$

NEEM PAREN $(A_0, B_0), (A_1, B_1), \ldots, (A_n, B_n)$ DISJ. GESL. VERZ'N <u>IN A</u>

BEKIJK $(\overline{A_0}, \overline{B_0}), \ldots, (\overline{A_n}, \overline{B_n})$

- GESL. IN X
- $\overline{A_0} \cap A = A_0$ ETC.

HET KAN BEST ZIJN DAT $\underbrace{\overline{A_0} \cap \overline{B_0}}_{K_0} \neq \emptyset$

$K_i = \overline{A_i} \cap \overline{B_i}$ IS GESLOTEN

$F = \bigcup_{i=0}^{n} K_i$ IS GESLOTEN

DUS $O = X \setminus F$ IS OPEN

- $\dim O \leq n$
- $\overline{A_i} \cap O \cap \overline{B_i} \cap O = \emptyset$

  $\overline{A_i} \cap O$ EN $\overline{B_i} \cap O$ ZIJN GESL. EN DISJUNCT IN O
- IN O KRIJGEN WE PARTITIES $P_0, \ldots, P_n$ TUSSEN $(\overline{A_i} \cap O)$ EN $(\overline{B_i} \cap O)$ TELKENS MET $\bigcap_{i=0}^{n} P_i = \emptyset$
- DAN ZIJN $P_0 \cap A, \ldots, P_n \cap A$ PARTITIES IN A TUSSEN TELKENS A_i EN B_i MET $\bigcap_{i=0}^{n} (P_i \cap A) = \emptyset$.

- $\dim \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n \leq n-1$.
- ALS $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ZÓ IS DAT $\operatorname{INT} A = \emptyset$ DAN IS ER EEN HOMEOMORFISME $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ MET

$$h[A] \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$$