AM 3590 2020-10-06 ①

STELLING

Als $A \subseteq \mathbb{R}^n$ dan

$$\dim A \leq n-1 \iff \operatorname{int} A = \emptyset$$

$\Rightarrow$ makkelyk

Als $\operatorname{int} A \neq \emptyset$ dan bevat A een kopie van $[0,1]^n$.

$\Leftarrow$ meer werk

- Als X metrisch is en $A \subseteq X$ dan $\dim A \leq \dim X$

! in algemene topologische ruimten hoeft dit niet te gelden !

- $\dim(\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n) = n-1$

$n=1$ wisten we al.

- Als $\operatorname{int} A = \emptyset$ dan is er een homeomorfisme $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ met $h[A] \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$

Geval $n=1$: Huiswerksom 4.

STELLING

$$\dim \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n = n-1$$

BEWIJS

$\geq$: $\underbrace{\{\pi\} \times \mathbb{R}^{n-1}}_{\dim = n-1} \subseteq \underbrace{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n}_{\dim \geq n-1}$

$\leq$: NET ALS HET BEWIJS VAN $\dim [0,1]^n \leq n$.

STEL $(A_1, B_1), \ldots, (A_m, B_m)$ ZIJN PAREN DISJ. GESL. VERZ'N IN $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$

$$F = (\overline{A_1} \cap \overline{B_1}) \cup \cdots \cup (\overline{A_m} \cap \overline{B_m})$$

$X = [0,1]$ $\quad A = \{ 1/2n : n = 1,2,3,\ldots \}$

$B = \{ 1/{2n+1} : n = 1,2,3,\ldots \}$

A EN B GESLOTEN IN $(0,1]$

$\overline{A} \cap \overline{B}$ IN X IS GELIJK AAN $\{0\}$.

$O = \mathbb{R}^n \setminus F$ OPEN VERZ.

WE KUNNEN $\mathbb{Q}$ OPSPLITSEN IN ONEINDIG VEEL DISJUNCTE VERZ'N DIE ZELF OOK DICHT ZIJN

BIJV VOOR ELK PRIEMGETAL

$$\mathbb{Q}_p = \{ k \cdot p^{-m} : k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}, \ \mathrm{GGD}(k,p) = 1 \}$$

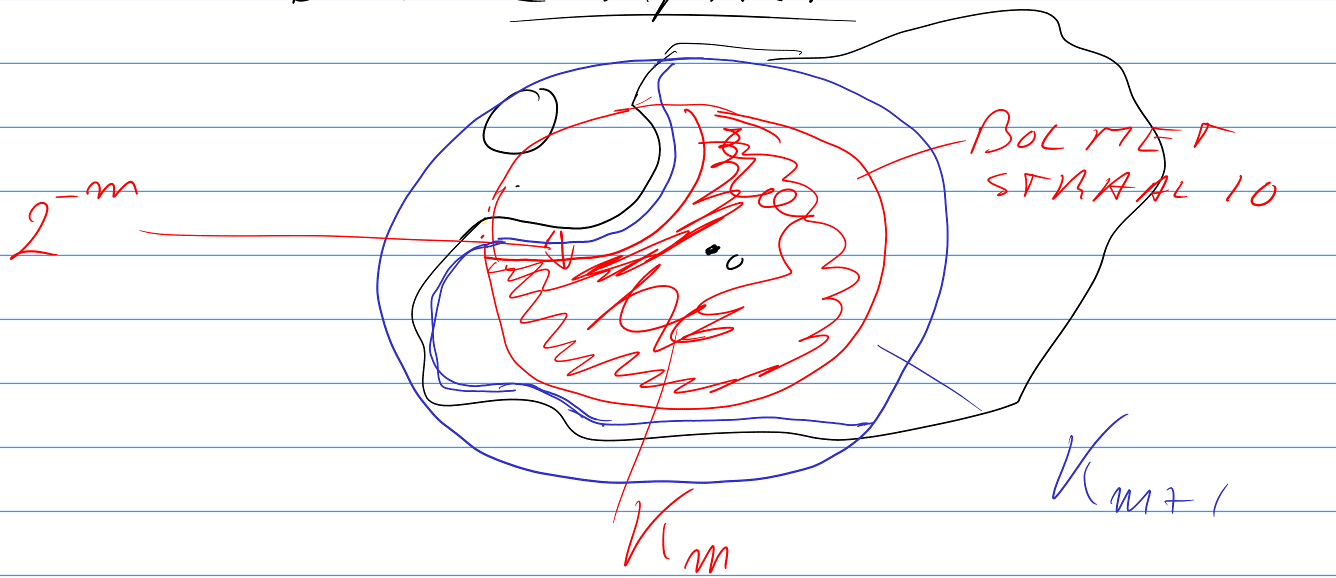
OPGAVE:

- ALS $p \neq q$ DAN $\mathbb{Q}_p \cap \mathbb{Q}_q = \emptyset$
- ELKE $\mathbb{Q}_p$ IS DICHT IN $\mathbb{R}$

VOOR $m \in \mathbb{N}$ DEFINIEER

$$K_m = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq m \text{ EN } d(x, F) \geq 2^{-m} \}$$

- $K_m \subseteq O$
- K_m IS GESL. EN BEGRENSD DUS <u>COMPACT</u>



$$K_m \subseteq \text{INT}\, K_{m+1}$$

$$O = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m.$$

NEEM i VAST EN BEKIJK $\overline{A_i} \cap O$ EN $\overline{B_i} \cap O$ GESLOTEN IN O EN DISJUNCT.

VOOR $x \in \overline{A_i} \cap O$
NEEM EEN KUBUS

$$C_x = \prod_{j=1}^{n} (r_j, s_j)$$

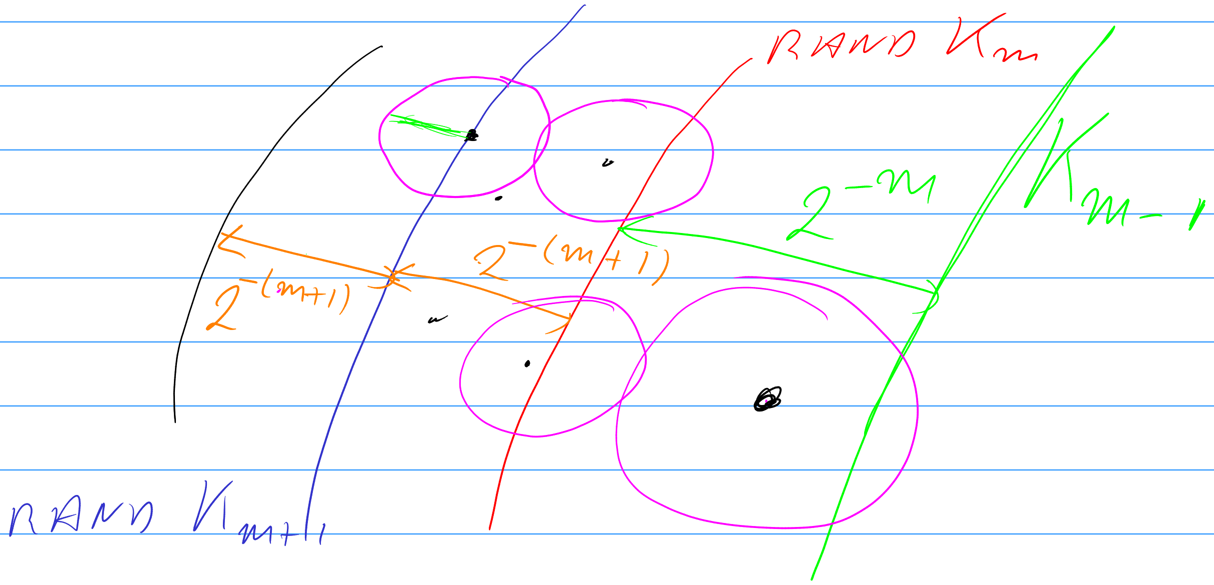
MET
- $x \in C_x$
- $r_j, s_j \in \mathbb{Q}_{p_i}$
- $\overline{C_x} = \prod_{j=1}^{n} [r_j, s_j]$
  IS DISJUNCT VAN $\overline{B_i} \cap O$
  IS BEVAT IN O

p_i HET i-DE PRIEMGETAL

– ALS $x \in K_{m+1} \setminus K_m$

DAN $\operatorname{DIAM} C_x < 2^{-(m+2)}$

EN $\overline{C_x} \cap K_m = \emptyset$



ALS $x \in K_m \setminus K_{m-1}$ EN $y \notin K_{m+2}$

DAN GELDT

$$\overline{C_x} \cap \overline{C_y} = \emptyset$$

$d(x, F) \geq 2^{-m}$ EN $\|x\| \leq m$

$d(y, F) < 2^{-(m+2)}$ OF $\|y\| > m+2$

$\|y\| > m+2$: $\|x - y\| > 2$

$$\operatorname{DIAM} C_x < 2^{-(m+1)}$$

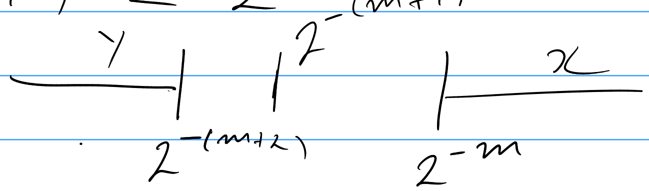
$$\operatorname{DIAM} C_y < 2^{-(m+4)}$$

$$\operatorname{DIAM} C_x + \operatorname{DIAM} C_y < 2$$

DUS $\overline{C_x} \cap \overline{C_y} = \emptyset$

$d(y, F) < 2^{-(m+2)}$

$\|x - y\| > 2^{-(m+1)} + 2^{-(m+2)} > \operatorname{DIAM} C_x + \operatorname{DIAM} C_y$



ALS $x \in K_m$ DAN

$x \in K_n \setminus K_{n-1}$ VOOR EEN $n \leq m$

$y \notin K_{n+2}$ NOG STEEDS $\overline{C_x} \cap \overline{C_y} = \emptyset$

• $\{C_x : x \in \overline{A_i} \cap O\}$ OVERDEKT $\overline{A_i} \cap O$

- $\overline{A_i} \cap K_1$ IS COMPACT
  NEEM EEN EINDIGE VERZ $G_1 \subseteq \overline{A_i} \cap K_1$
  ZŌ DAT

$$\overline{A_i} \cap K_1 \subseteq \bigcup_{x \in G_1} C_x =: U_1$$

- $(\overline{A_i} \cap K_2) \setminus U_1$ IS COMPACT
  NEEM $G_2 \subseteq (\overline{A_i} \setminus K_2) \setminus U_1$ EINDIG
  MET

$$(\overline{A_i} \cap K_2) \setminus U_1 \subseteq U_2 = \bigcup_{x \in G_2} C_x$$

$(\overline{A_i} \cap K_{m+1}) \setminus \bigcup_{j \leq m} U_j$ IS COMPACT

NEEM G_{m+1} EINDIG ZÓDAT

$U_{m+1} = \bigcup_{x \in G_{m+1}} C_x$ DAT OVERDEKT

$W_i = \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m = \bigcup \{C_x : x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m\}$

W_i IS OPEN

$\overline{A_i} \cap O \subseteq W_i$

! $\overline{W_i} \cap O = \bigcup \{ \overline{C_x} : x \in \bigcup_{m=1}^{?} G_m \} \cap O$!

IHA : $\overline{H \cup K} = \overline{H} \cup \overline{K}$
DIT GAAT MEESTAL MIS
BIJ ONEINDIGE VERENIGINGEN

$\mathbb{Q} = \bigcup \{ \{q\} : q \in \mathbb{Q} \}$

$= \bigcup \{ \overline{\{q\}} : q \in \mathbb{Q} \}$

$\neq \overline{\mathbb{Q}}$

$(0,1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [2^{-n}, 1 - 2^{-n}]$

$\supseteq$ GELDT ALTIJD:

$W_i = \bigcup_x C_x$

DUS $\overline{C_x} \subseteq \overline{W_i}$ ALLE x

DUS $\bigcup_x \overline{C_x} \subseteq \overline{W_i}$

$\subseteq$ SPECIAAL

STEL $x \in \overline{W_i} \cap O$
EN NEEM m MET $x \in K_m$
ALS $y \notin K_{m+2}$ DAN
$\overline{C_y} \cap \overline{C_x} = \emptyset$

DUS $x \notin \bigcup \{ C_y : y \in \bigcup_{n=m+3}^{\infty} G_n \}$

$$\overline{W_i} = \overline{\bigcup_{z \in G_1} C_z} \cup \overline{\bigcup_{z \in G_2} C_z} \cup \dots \cup \overline{\bigcup_{z \in G_{m+2}} C_z}$$

$$\cup \bigcup \{ C_y : y \in \bigcup_{n=m+3}^{\infty} G_n \}$$

ONZE x ZIT NIET IN

DUS $x \in$

$$\overline{\bigcup_{z \in G_1} C_z} \cup \dots \cup \overline{\bigcup_{z \in G_{m+2}} C_z}$$

$$= \bigcup_{z \in G_1} \overline{C_z} \cup \dots \cup \bigcup_{z \in G_{m+2}} \overline{C_z}$$

HIERUIT VOLGT:

$$\text{RAND } W_i \subseteq \bigcup \{ \text{RAND } C_z : z \in \bigcup_{m=1}^{\infty} G_m \}$$

DUS ALS $x \in \text{RAND } W_i =: P_i$

DAN HEEFT x EEN COÖRDINAAT IN Q_{P_i}

P_i IS EEN PART. TUSSEN $\overline{A_i} \cap O$ EN $\overline{B_i} \cap O$ IN O

CONCLUSIE

$$\bigcap_{i=1}^{n} P_i \subseteq Q^n$$

SNIJDT NU ALLES MET $\mathbb{R}^n \setminus Q^n$

KLAAR

ALS $\text{INT}\, A = \emptyset$ DAN KUNNEN WE A HET COMPLEMENT VAN $\mathbb{Q}^n$ INDUWEN.

$n = 2$: VOOR ELKE RECHTHOEK $(p, q) \times (r, s)$ MET $p, q, r, s \in \mathbb{Q}$

KIES $\underline{x}(p, q, r, s)$ IN $\big((p,q) \times (r,s)\big) \setminus A$.

$D = \{ x(p, q, r, s) : p, q, r, s \in \mathbb{Q} \}$ IS DICHT IN $\mathbb{R}^2$ EN AFT.

BEWERING: ER IS EEN HOMEOMORFISME $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ MET

$$h[D] = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

$$\big(\text{DUS } h[A] \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2 \big)$$

- ALS $E \subseteq \mathbb{R}^2$ AFTELBAAR IS DAN IS ER EEN ROTATIE ρ VAN HET VLAK (OM $(0,0)$) ZÓDAT VOOR $\underline{a}, \underline{b} \in \rho[E]$ GELDT:

  ALS $\underline{a} \neq \underline{b}$ DAN $a_1 \neq b_1$ EN $a_2 \neq b_2$

AFT. VEEL PUNTEN
AFT VEEL PAREN
AFT HELLINGEN VAN VERBINDINGSLYNEN

ROTEER NU D OVER EEN HELLING ONGELIJK AAN AL DIE HELLINGEN (TEGENGESTELD) GEEFT E

ROTEER $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ OOK: F

DOE NU HUISWERKSOM 4 ZORGVULDIG NA EN MAAK TWEE ORDE-BEWAARENDE BIJECTIES

$$b_1 : \{e_1 : e \in E\} \longrightarrow \{f_1 : f \in F\}$$

$$b_2 : \{e_2 : e \in E\} \longrightarrow \{f_2 : f \in F\}$$

ZORG DAT ALTIJD ALS $e \in E$

$$(b_1(e_1), b_2(e_2)) = (f_1, f_2)$$

$f \in F$.