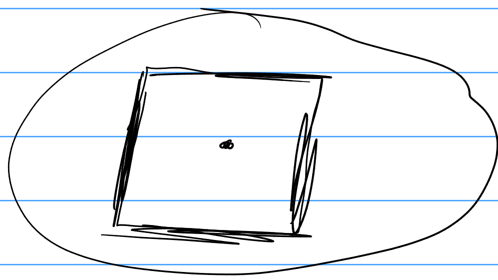
STELLING
VOOR $A \subseteq \mathbb{R}^n$ GELDT
$\dim A \leq n-1$
DAN EN SLECHTS
DAN ALS
$\operatorname{Int} A = \emptyset$

GEVOLG:
STEL $U \subseteq \mathbb{R}^n$ IS OPEN
EN $f: U \to \mathbb{R}^n$ IS
CONTINU EN INJECTIEF.
DAN IS HET INWENDIGE
VAN $f[U]$ NIET LEEG.
[BROUWER: ZELFS
$f[U]$ IS OPEN]

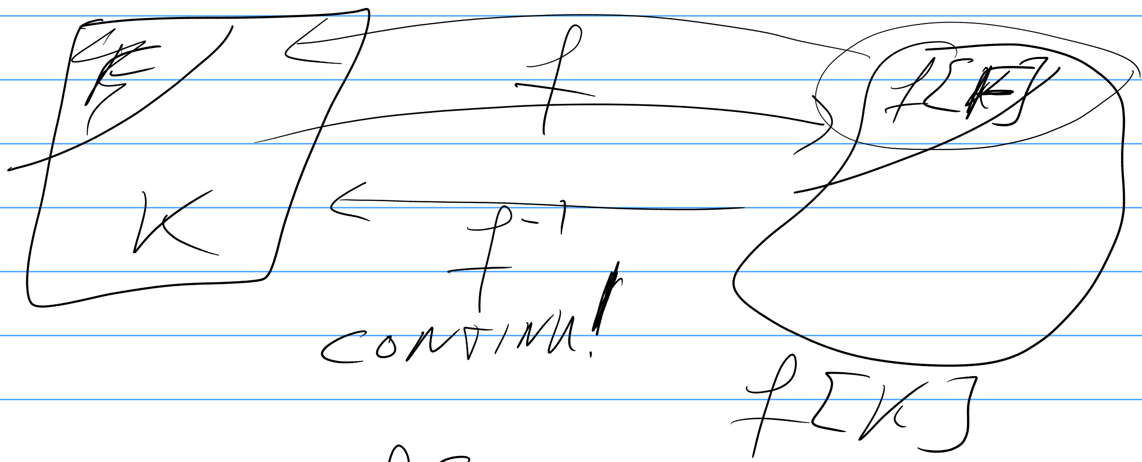
BEWIJS
BINNEN U
VINDEN WE



EEN n-KUBUS (KOPIE VAN)
DIE IS COMPACT
K

Dus $f\restriction K : K \longrightarrow f[K]$

IS EEN HOMEOMORFISME.



DUS $\dim f[K] = n$

DUS $\operatorname{INT} f[K] \neq \emptyset$

IHB KAN $f[U]$ DUS

NIET BINNEN

EEN $\mathbb{R}^{n-1}$ LIGGEN

IDEE

STEL $\operatorname{INT} A = \emptyset$

1 ER IS EEN HOMEOMORFISME

$h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

MET $h[A] \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$

$n = 1$ ZIE HUISWERK 4

2. $\dim \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n \leq n-1$

3. ALS $A \subseteq X$ DAN
$\dim A \leq \dim X$.
METRISCH IS BELANGRIJK

1. a) $\operatorname{INT} A = \emptyset$: ER IS
EEN AFT DICHTE
VERZ D IN $\mathbb{R}^n$
MET $D \cap A = \emptyset$.

VOOR ELKE BOL
$B(\underline{q}, r)$ MET
$\underline{q} \in \mathbb{Q}^n$, $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$!

KIES $d(\underline{q}, r) \in B(\underline{q}, r) \setminus A$.

$$D = \{ d(\underline{q}, r) : \underline{q} \in \mathbb{Q}^n, \underset{r>0}{r \in \mathbb{Q}} \}$$

IS DICHT IN $\mathbb{R}^n$.

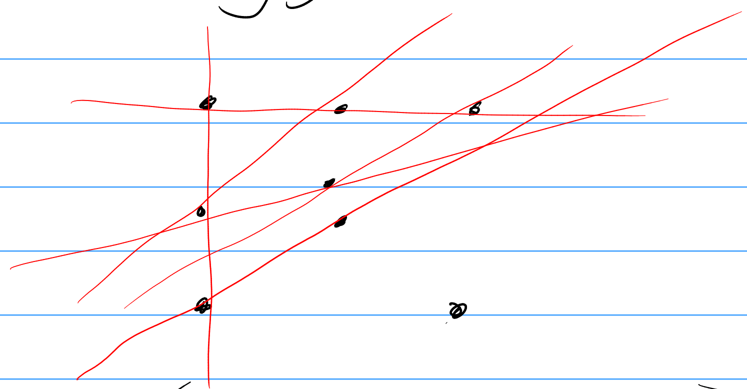
b) ER IS EEN HOMEOMORFISME
$h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ MET
$h[D] = \mathbb{Q}^n$.

$n = 1$: HUISWERK 4.

$n=2$ STEL D EN E ZIJN AFTELBAAR EN DICHT IN $\mathbb{R}^2$ DAN IS ER EEN $h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ MET

$$h[D] = E.$$

- ER IS EEN ROTATIE ρ VAN $\mathbb{R}^2$ OM $(0,0)$ ZODAT $\rho[D]$ ELKE VERTICALE EN ELKE HORIZONTALE LIJN IN TEN HOOGSTE EEN PUNT SNIJDT.



ER ZIJN AFT. VEEL LIJNEN DIE TWEE OF MEER PUNTEN VAN D BEVATTEN

KIES EN HOEK α ONGELIJK AAN DE AFT. VEEL HOEKEN VAN DIE LIJNEN $\pm \pi/2$

EN ROTEER OVER $-\alpha$.

DIT KAN OOK VOOR E

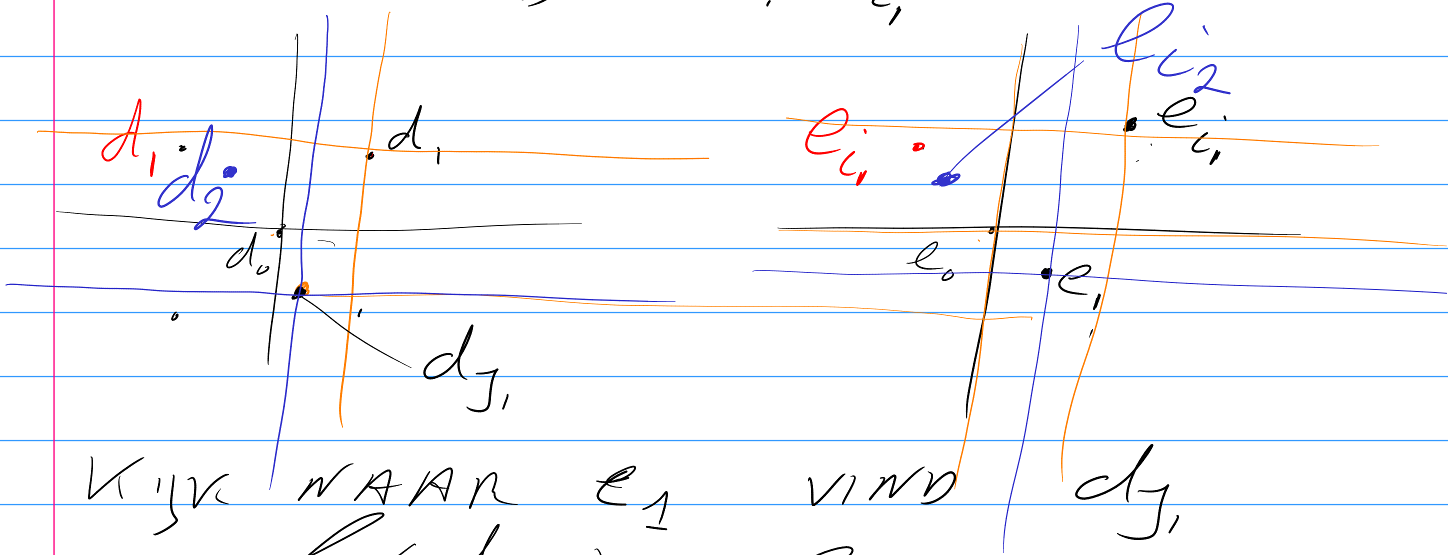
NUMMER NU $D = \{d_n : n \in \mathbb{N}\}$

EN $E = \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$

DEFINIEER $b : D \longrightarrow E$

RECURSIEF:

- $b(d_0) = e_0$
- $b(d_1) \overset{?}{=} e_{i_1}$



KIJK NAAR e_1 VIND d_{j_1}

$b(d_{j_1}) = e_1$

$b(d_2) = e_{i_2}$

DE BIJECTIE b

IS EIGENLYK TWEE

BIJECTIES:

$b_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ HOR.

$b_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ VERT.

b_1 EN b_2 ZIJN ORDEBEW.
EN $b(d) = (b_1(d_x), b_2(d_y))$

$$h_1(t) = \sup\{ b_1(d_x) : d \in D,\ d_x < t \}$$

$$h_2(s) = \sup\{ b_2(d_y) : d \in D,\ d_y < s \}$$

$$h_1, h_2 : \mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}$$

$$h(t, s) = (h_1(t), h_2(s))$$

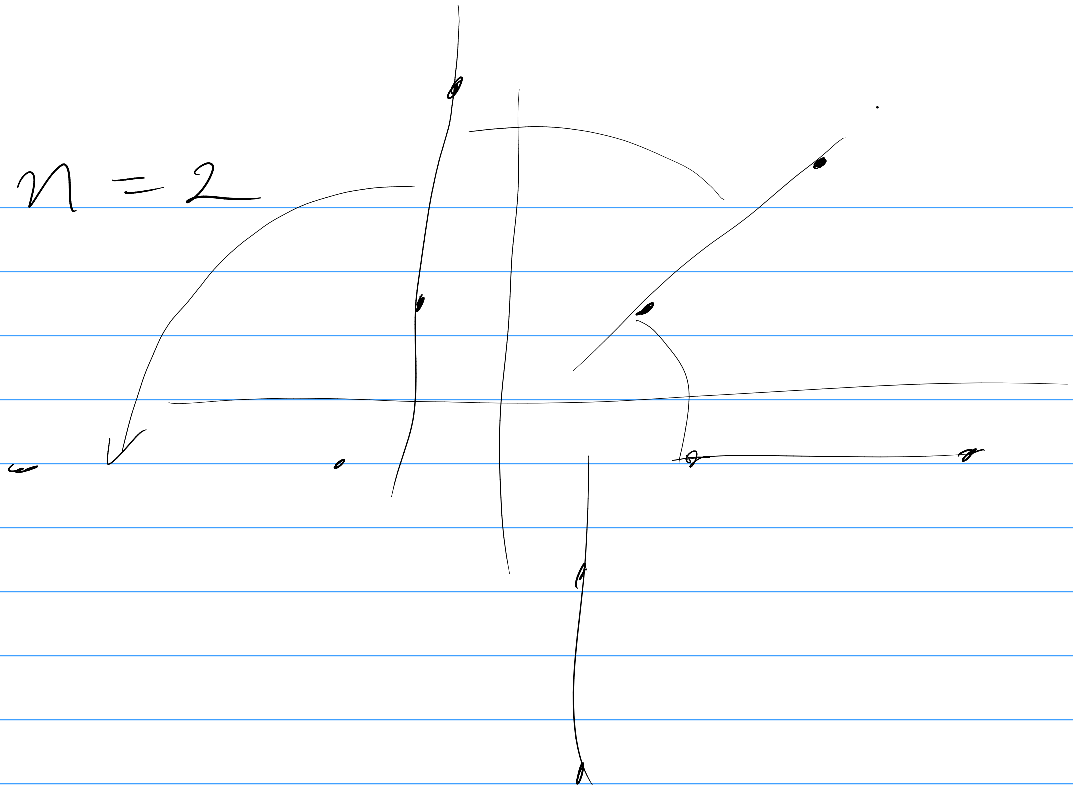
IS EEN HOMEOMORFISME
VAN $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

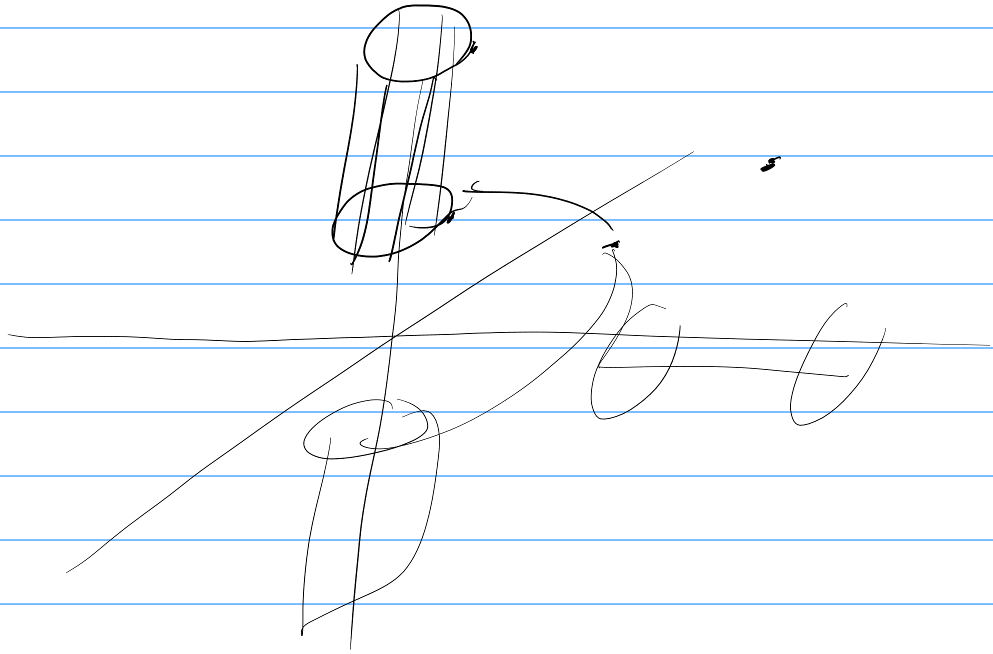
EN $h[D] = E$.

ALGEMEEN:

- ORTHOG MATRIX U
  ZODAT $U[D]$ DE
  EIGENSCHAP HEEFT
  DAT DE PROJECTIES
  OP DE ASSEN INJECTIEF
  ZIJN

$n = 2$





ALGEMENE TOPOLOGIE:

TOPOLOGISCHE RUIMTEN

- EEN TOPOLOGIE op EEN VERZ. X IS EEN FAMILIE DEELVERZ'N $\mathcal{T}$ MET
  - $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
  - ALS $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ DAN $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$
  - ALS $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ DAN $\bigcup \mathcal{T}' \in \mathcal{T}$

HET PAAR $(X, \mathcal{T})$ IS DAN EEN TOPOLOGISCHE RUIMTE

BIJV PUNTSGEWIJZE CONV. VAN RIJEN FUNCTIES IS NIET 'METRISCH'.

DE ELEMENTEN VAN $\mathcal{T}$ NOEMEN WE OPEN VERZ'N.

SOMMETJE

ALS $O_1, O_2, \ldots, O_n \in \mathcal{T}$

DAN $O_1 \cap O_2 \cap \ldots \cap O_n \in \mathcal{T}$

VOORBEELDEN

1. (X,d) METRISCHE RUIMTE

$\mathcal{T}_d = \{ O : O \text{ is } d\text{-open} \}$.

2. $X = \mathbb{R}^2$:

$\mathcal{T}_R = \{ O :$ VOOR ELKE LIJN ℓ IN HET VLAK IS $O \cap \ell$ open IN DE GEWONE TOP. VAN $\ell \}$

RADIAL TOPOLOGY

$\emptyset \in \mathcal{T}_R$? NATUURLYK $\emptyset \cap \ell = \emptyset$

$\mathbb{R}^2 \in \mathcal{T}_R$? NATUURLYK $\mathbb{R}^2 \cap \ell = \ell$

$O_1, O_2 \in \mathcal{T}_R \longrightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}_R$? JA

NEEM ℓ WILLEKEURIG.

$O_1 \cap O_2 \cap \ell = (O_1 \cap \ell) \cap (O_2 \cap \ell)$

DIT IS OPEN-IN-ℓ

STEL $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}_R$ ZIT $\bigcup \mathcal{T}'$ IN $\mathcal{T}_R$

ZIJ ℓ WILLEKEURIG:

$\ell \cap \bigcup \mathcal{T}' = \bigcup \{ \ell \cap O : O \in \mathcal{T}' \}$

$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $[0,1]$, $[0,1]^n$, ------

TENZIJ ANDERS VERMELD BEKIJKEN WE MET HUN GEWONE METRISCHE TOPOLOGIE

- X WILLEKEURIG

$\mathcal{T}_i = \{\emptyset, X\}$

$\bigcup \emptyset = \emptyset$

- X WILLEKEURIG

$\mathcal{T}_D = \{O : O \subseteq X\}$ $(= \mathcal{P}(X))$

KOMT VAN DE DISCRETE METRIEK :

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

- $S = \{0,1\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{0\}, S\}$

SIERPIŃSKI-RUIMTE

- X ONEINDIG

$\mathcal{T}_{co} = \{\emptyset\} \cup \{O \subseteq X : X \setminus O \text{ EINDIG}\}$

CO-EINDIGE TOPOLOGIE.

$\emptyset, X$ ✓

$$X \setminus (O_1 \cap O_2) = \underbrace{(X \setminus O_1)}_{\text{EINDIG}} \cup \underbrace{(X \setminus O_2)}_{\text{EINDIG}}$$

ALS $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}_{CO}$ DAN
OF $\mathcal{T}' = \{\emptyset\}$ DUS $\bigcup \mathcal{T}' = \emptyset$
OF ER IS $O \in \mathcal{T}'$ MET $O \neq \emptyset$
DAN

$$X \setminus \bigcup \mathcal{T}' \subseteq X \setminus O.$$

- X OVERAFTELBAAR
  $\mathcal{T}_{CA} = \{\emptyset\} \cup \{O : X \setminus O \text{ AFT.}\}$

GESLOTEN = COMPLEMENT IS OPEN

SOM. MAAK IN $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{CE})$ EEN RIJ $(O_n)_n$ VAN OPEN VERZ'N ZÓ DAT

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$$

NIET OPEN IS