AM 3590 2020-10-13

EEN TOPOLOGIE $\mathcal{T}$ OP X

IS EEN FAMILIE DEELVERZ'N $\mathcal{T}$ VAN X MET

O1 $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

O2 $O_1, O_2 \in \mathcal{T} \rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$

O3 $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T} \rightarrow \bigcup \mathcal{T}' \in \mathcal{T}$

GESLOTEN $\equiv$ COMPLEMENT IS OPEN.

$\mathcal{F}$ DE FAMILIE GESLOTEN VERZ'N

G1 $X, \emptyset \in \mathcal{F}$

G2 $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$

G3 $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F} \rightarrow \bigcap \mathcal{F}' \in \mathcal{F}$

⌜WE HADDEN "TOPOLOGISCHE RUIMTE" OOK KUNNEN DEFINIËREN DOOR G1, G2, G3 ALS 'PRIMITIEVE' NOTIES TE NEMEN⌟

- INWENDIGE A° OF $\operatorname{int} A$
  $\bigcup\{O \in \mathcal{T} : O \subseteq A\}$
  "DE GROOTSTE OPEN VERZ. BINNEN A"
- AFSLUITING $\overline{A}$ OF $\operatorname{cl} A$
  $\bigcap\{F \in \mathcal{F} : F \supseteq A\}$
  DE KLEINSTE GESLOTEN VERZ. OM A.

- OMGEVING VAN x:

A IS <u>OMGEVING</u> VAN x
ALS ER EEN $O \in \mathcal{T}$ IS
MET $x \in O \subseteq A$.

DUS $x \in A^\circ \Longleftrightarrow A$ IS OMG. VAN x

$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow$ VOOR ELKE OPEN O
MET $x \in O$ GELDT $O \cap A \neq \emptyset$

"$\Longrightarrow$" STEL $x \in \overline{A}$ NEEM O OPEN
MET $x \in O$ TB $O \cap A \neq \emptyset$

- $F = X \setminus O$ IS GESLOTEN
- $x \notin F$ MAAR $x \in \overline{A}$

WE WETEN "$A \subseteq F \longrightarrow x \in F$"
OOK "$x \notin F$"
DWZ $A \not\subseteq F$
DWZ $O \cap A \neq \emptyset$

"$\Longleftarrow$" TB ALS F GESL. EN $A \subseteq F$
DAN $x \in F$
NEEM ZO'N F EN BEKIJK
$O = X \setminus F$
VOOR O GELDT $O \cap A = \emptyset$
<u>DUS</u> $x \notin O$
DWZ $x \in F$.

- $A^\circ = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$
OF $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$

) DE MORGAN

- RAND A, ∂A, FR A, ...
$\overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$

DUS $x \in \partial A \iff$
VOOR ELKE OPEN O MET
$x \in O$ GELDT
$O \cap A \neq \emptyset$ EN $O \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$

- A' AFGELEIDE VERZ.

$x \in A' \iff$ VOOR ELKE OPEN O
MET $x \in O$ GELDT
$O \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

$\downarrow$

x IS VERDICHTINGSPUNT

- $0 \in \{1/n : n \in \mathbb{N}\}'$ IN $\mathbb{R}$
- $0 \in \mathbb{Q}'$ IN $\mathbb{R}$
  $\pi \in \mathbb{Q}'$, $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}'$

NB $A' \subseteq \overline{A}$
ZELFS: $\overline{A} = A \cup A'$

NEEM $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{CE}$
$A = 2\mathbb{N}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$, $C = \mathbb{N} \setminus B$
$\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, A^0, B^0, C^0,
A', B', C', $Fr A$, $Fr B$, $Fr C$, ...

- A IS <u>DICHT</u> IN X ALS $\overline{A} = X$.

EQUIVALENT
$A \cap O \neq \emptyset$ VOOR ELKE
NIET-LEGE OPEN O.

- $\mathbb{Q}$ IS <u>DICHT</u> IN $\mathbb{R}$
  $\mathbb{Q}$ IS NIET GESLOTEN IN $\mathbb{R}$
- IN $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{CE})$: $2\mathbb{N}$ IS DICHT
  NIET GESLOTEN.

- $(X, \mathcal{T})$ IS SEPARABEL ALS ER EEN AFTELBARE DICHTE DEELVERZ. IS.

- $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \ldots$ GEWONE TOPOLOGIE
- $\mathbb{R}$, MET DISCRETE TOPOLOGIE IS DAT NIET
  $A \subseteq \mathbb{R}$ AFT. NEEM $x \in \mathbb{R} \setminus A$
  DAN IS $\{x\}$ OPEN, NIET-LEEG, EN $\{x\} \cap A = \emptyset$
  ALT: A IS GESLOTEN, $A = \overline{A}$ EN $A \neq \mathbb{R}$

- $(X, \mathcal{T})$ TOP RUIMTE, $(x_n)_n$ EEN RIJ IN X
  $x \in X$
  WE ZEGGEN
  $x_n \longrightarrow x$ "DE RIJ CONV. NAAR x"
  ALS
  VOOR ELKE $O \in \mathcal{T}$ MET $x \in O$ GELDT ER IS EEN $N \in \mathbb{N}$ ZODAT $x_n \in O$ VOOR $n \geq N$.

$C([0,1], \mathbb{R})$ MET UNIF METRIEK
$$d(f,g) = \sup\{ |f(x) - g(x)| : 0 \leq x \leq 1 \}$$
DE POLYNOMEN VORMEN EEN DICHTE DEELVERZ: STONE WEIERSTRASS
OOK DIE MET RATIONALE COËFFICIËNTEN. DE RUIMTE IS DUS SEPARABEL

OPGAVE IN $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{CE})$
DE RIJ $(n)_n$ CONVERGEERT
NAAR <u>ALLE</u> PUNTEN IN $\mathbb{N}$.

DE RADIALE TOPOLOGIE OP $\mathbb{R}^2$
DUS
$O \in \mathcal{T}_R \iff$ VOOR ELKE LIJN L
IN $\mathbb{R}^2$ IS $O \cap L$ OPEN
<u>IN L</u> (GEWONE TOP.)

STEL DAT F ZÓ IS DAT
GEEN DRIETAL ELEMENTEN
VAN F OP ÉÉN LIJN LIGT.
DAN IS F GESLOTEN
IN DE TOPOLOGIE $\mathcal{T}_R$

$(\mathbb{R}^2 \setminus F) \cap L$ MIST TEN HOOGSTE
TWEE PUNTEN
DAT IS L, $L \setminus \{x\}$, OF $L \setminus \{x, y\}$.
HOE DAN OOK: OPEN <u>IN L</u>

OPGAVE MAAK ZO'N F
DIE AFTELBAAR IS EN
<u>DICHT</u> TEN OPZICHTE VAN
<u>DE</u> GEWONE TOPOLOGIE VAN $\mathbb{R}$.

DAN : $\overline{F} = F$ TOV $\mathcal{T}_R$

$\overline{F} = \mathbb{R}^2$ TOV GEWONE TOPOLOGIE.

TOPOLOGIEËN MAKEN.

- BASIS (2)
- LOKALE BASES (1)
- SUBBASIS (3)

- BASIS VOOR EEN TOPOLOGIE
$(X, \mathcal{T})$ EEN TOP. RUIMTE
EEN <u>BASIS</u> VOOR $\mathcal{T}$ IS
EEN DEELFAMILIE $\mathcal{B}$ VAN $\mathcal{T}$
MET DE EIGENSCHAP DAT
ELKE $O \in \mathcal{T}$ IS TE SCHRIJVEN
→ ALS $\bigcup \mathcal{B}'$ VOOR EEN $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$.
MET ANDERE WOORDEN
VOOR ELKE $O \in \mathcal{T}$ EN ELKE $x \in B$
IS ER EEN $B \in \mathcal{B}$ MET
$x \in B \subseteq O$.
[BEWIJS DIT]

VOORBEELDEN;

- (X, d) METRISCHE RUIMTE
$\mathcal{B} = \{ B(x, r) : x \in X, r > 0 \}$
IS EEN BASIS VOOR DE TOPOLOGIE.
DEF $O \in \mathcal{T} \Leftrightarrow$ VOOR ELKE $x \in O$
IS ER EEN $r > 0$
MET $B(x, r) \subseteq O$

BASIS VOOR $O \in \mathcal{T}$ EN $x \in O$
IS EEN BOL $B(y, r)$ MET
$x \in B(y, r) \subseteq O$

$\downarrow$ $y = x$ $\uparrow$ NEEM $s = r - d(x, y)$
DAN $B(x, s) \subseteq B(y, r) \subseteq O$

- $\{\{x\} : x \in X\}$ IS EEN BASIS VOOR DE DISCRETE TOPOLOGIE op X.
- $\{X\}$ VOOR DE INDISCRETE.

NB $\bigcup \emptyset = \emptyset$

STELLING 6
ALS $\mathcal{B}$ EEN BASIS VOOR $\mathcal{T}$ IS DAN GELDEN:
(a) $\bigcup \mathcal{B} = X$
(b) ALS $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ EN $x \in B_1 \cap B_2$ DAN IS ER EEN $B_3 \in \mathcal{B}$ MET $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

(a): X is open
(b): $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$

STELLING
STEL X IS EEN VERZ. EN $\mathcal{B}$ IS EEN FAMILIE DEELVERZ'N DIE AAN (a) EN (b) VOLDOET DAN IS ER PRECIES EEN TOPOLOGIE $\mathcal{T}$ op X WAAR $\mathcal{B}$ EEN BASIS VOOR IS.

- $\mathcal{T}$ MAKEN
- $\mathcal{B}$ IS BASIS VOOR $\mathcal{T}$
- ALS $\mathcal{S}$ EEN TOP IS MET $\mathcal{B}$ ALS BASIS DAN $\mathcal{S} = \mathcal{T}$

- $\mathcal{T}$ MAKEN IS GEEN KUNST

WANT WE HEBBEN GEEN KEUZE
WE MOETEN
$$\mathcal{T} = \{ \cup \mathcal{B}' : \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B} \}$$
NEMEN.

- $\emptyset = \cup \emptyset$, $X = \cup \mathcal{B}$ (a) !!
- $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$: $B = \cup \{B\}$
- STEL $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}$
  GELDT $(\cup \mathcal{B}_1) \cap (\cup \mathcal{B}_2) \in \mathcal{T}$
  NEEM $x \in (\cup \mathcal{B}_1) \cap (\cup \mathcal{B}_2)$
  DAN $x \in B_1$ EN $x \in B_2$
  VOOR EEN $B_1 \in \mathcal{B}_1$ EN $B_2 \in \mathcal{B}_2$
  NEEM $B_3 \in \mathcal{B}$ MET
  $$x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2 \quad (b)$$
  $$\subseteq (\cup \mathcal{B}_1) \cap (\cup \mathcal{B}_2)$$
  $\mathcal{B}_3 = \{ B \in \mathcal{B} : B \subseteq (\cup \mathcal{B}_1) \cap (\cup \mathcal{B}_2) \}$
  DAN
  $$\cup \mathcal{B}_3 = (\cup \mathcal{B}_1) \cap (\cup \mathcal{B}_2)$$
- ALS $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$
  DAN IS ELKE $O \in \mathcal{T}'$
  VAN DE VORM $\cup \mathcal{B}_O$ MET $\mathcal{B}_O \subseteq \mathcal{B}$
  NEEM $\mathcal{B}' = \cup \{ \mathcal{B}_O : O \in \mathcal{T}' \}$
  DAN GELDT
  $$\cup \mathcal{T}' = \cup \mathcal{B}'$$
  DUS $\cup \mathcal{T}' \in \mathcal{T}$

- ALS $\mathcal{S}$ EEN TOP IS MET $\mathcal{B}$
  ALS BASIS DAN $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$
  PER DEFINITIE
  OMGEKEERD $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$ OOK PER DEF.

WANT $\mathcal{S}$ IS EEN TOPOLOGIE
ALS $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ DAN $\bigcup \mathcal{B}' \in \mathcal{S}$
OMDAT $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{S}$

SORGENFREY-LIJN

NOTATIE $\mathbb{S}$.

DE VERZ IS $\mathbb{R}$

$\mathcal{B} = \{ [a,b) : a,b \in \mathbb{R},\ a < b \}$

(a) DUIDELIJK : $x \in [x, x+1)$

(b) DUIDELIJK $[a,b) \cap [c,d)$ IS LEEG OF WEER VAN DE VORM $[p,q)$

$B_1, B_2 \in \mathcal{B} \longrightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$

$\mathbb{R}$ MET DEZE TOP IS DUS DE SORGENFREY-LIJN $\mathbb{S}$

$\mathbb{S}$ IS SEPARABEL

$\mathbb{S}$ HEEFT GEEN AFT. BASIS

ALS (X,d) METRISCH IS EN SEPARABEL DAN HEEFT DE TOPOLOGIE EEN AFT. BASIS
