AM3590 2020-10-16

Topologieën maken

Dinsdag: <u>Basis</u>

$\mathcal{T}$ een topologie

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ is een basis

als elke $O \in \mathcal{T}$ te schrijven is als $\bigcup \mathcal{B}'$ voor een $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$

In de praktijk:

$\mathcal{B}$ is een basis desda

voor elke $O \in \mathcal{T}$ voor elke $x \in O$ is er een $B \in \mathcal{B}$ met

$$x \in B \subseteq O.$$

Voorbeeld:

$\mathcal{S} = \{ [a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b \}$

(*) $\mathcal{B}$ voldoet aan $\bigcup \mathcal{B} = X$

voor $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ en $x \in B_1 \cap B_2$ is er $B_3 \in \mathcal{B}$ met $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

$\mathcal{S}$ BEPAALT EEN TOP. op $\mathbb{R}$

DE SORGENFREY-TOPOLOGIE

$\mathbb{R}$ MET DIE TOPOLOGIE NOTEREN WE ALS $\mathbb{S}$,

DE SORGENFREYLIJN.

[OPGAVE

- ALS X SEPARABEL EN METRISCH IS, DAN HEEFT DE TOPOLOGIE EEN AFT. BASIS
- $\mathbb{S}$ IS SEPARABEL MAAR HEEFT GEEN AFT. BASIS]

! EEN RUIMTE MET AFT. BASIS IS SEPARABEL.

STEL $\mathcal{B}$ IS EEN AFT. BASIS

KIES $x_B \in B$ VOOR $B \in \mathcal{B}$

$D = \{x_B : B \in \mathcal{B}\}$ IS DICHT.

$\overline{D} = X$ of ELKE NIET LEGE OPEN VERZ. SNYDT D

$O \in \mathcal{T}$, $O \neq \emptyset$ NEEM

$B \in \mathcal{B}$ MET $B \neq \emptyset$, $B \subseteq O$

$x_B \in O \cap D$

LOKALE BASIS

$(X, \mathcal{T})$ top ruimte

Neem $x \in X$

Een familie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$

is een lokale basis in x

als

voor elke $O \in \mathcal{T}$ met $x \in O$

er een $B \in \mathcal{B}$ is met

$x \in B \subseteq O$.

Algemeen: $x \in B$ voor alle $B \in \mathcal{B}$

Metrische ruimte $x \in X$

$\mathcal{B}_1 = \{ B(x, \varepsilon) : \varepsilon > 0 \}$

$\mathcal{B}_2 = \{ B(x, 2^{-n}) : n \in \mathbb{N} \}$

NB in een metr. ruimte heeft elk punt een aft. lokale basis

In $\mathbb{S}$ ook:

$\mathcal{B}_x = \{ [x, x+2^{-n}) : n \in \mathbb{N} \}$

is een lok. basis in x

als $x \in O$ dan $x \in [a, b) \subseteq O$

dus ook $[x, b) \subseteq O$

kies n met $2^{-n} < b - x$

DE SORGENFREY-TOPOLOGIE MODELEERT HET PASSEN VAN SCHOENEN.

$[x, x+\varepsilon)$ EEN BEETJE GROTER MAG WEL.

TE KLEIN IS NOOIT GOED

STELLING

$(X, \mathcal{T})$ EEN TOP. RUIMTE

VOOR ELKE x NEMEN WE EEN LOKALE BASIS $\mathcal{B}_x$ DAN GELDT

(*)

- $\mathcal{B}_x \neq \emptyset$ EN IS EEN $B \in \mathcal{B}_x$ MET $x \in B \subseteq X$.
- VOOR $B \in \mathcal{B}_x$ GELDT $x \in B$
- ALS $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$ DAN IS ER $B_3 \in \mathcal{B}$ MET $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$
- (ALS $B \in \mathcal{B}_x$ EN $y \in B$ DAN IS ER EEN $D \in \mathcal{B}_y$ MET $D \subseteq B$

[$y \in B(x, r)$ ZIT EN $\varepsilon = r - d(x,y)$

DAN $B(y, \varepsilon) \subseteq B(x, r)$]

$y \in [x, x+2^{-n})$ NEEM m

MET $2^{-m} < x + 2^{-n} - y$

DAN $[y, y+2^{-m}) \subseteq [x, x+2^{-n})$

STELLING:

STEL X IS EEN VERZ. EN VOOR ELKE $x \in X$ HEBBEN WE $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{P}(X)$ GENOMEN ZÓ DAT AAN (*) VOLDAAN IS

DAN DEFINIEERT
$$\boxed{O \in \mathcal{T} \iff \left(\forall x \in O \; \exists B \in \mathcal{B}_x \; B \subseteq O \right)}$$
EEN TOP. OP X

EN DE $\mathcal{B}_x$-EN ZIJN LOKALE BASES.

- $\emptyset \in \mathcal{T}$ JA [LEEG VERVULD]
- $X \in \mathcal{T}$ JUIST OMDAT $\mathcal{B}_x \neq \emptyset$
- $O_1, O_2 \in \mathcal{T} \implies O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$

  ALS $x \in O_1 \cap O_2$ DAN ZIJN ER B_1 EN $B_2 \in \mathcal{B}_x$ MET $x \in B_1 \subseteq O_1$
  $x \in B_2 \subseteq O_2$
  NEEM B_3 ... KLAAR
- ALS $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ DAN $\bigcup \mathcal{T}' \in \mathcal{T}$

  ALS $x \in \bigcup \mathcal{T}'$ DAN $x \in O$ VOOR EEN $O \in \mathcal{T}'$
  NEEM $B \in \mathcal{B}_x$ MET $x \in B \subseteq O$
  DAN OOK $x \in B \subseteq \bigcup \mathcal{T}'$

DE $\mathcal{B}_x$-EN VOLDOEN AAN

① ALS $x \in O$ DAN IS ER EEN $B \in \mathcal{B}_x$ MET $B \subseteq O$

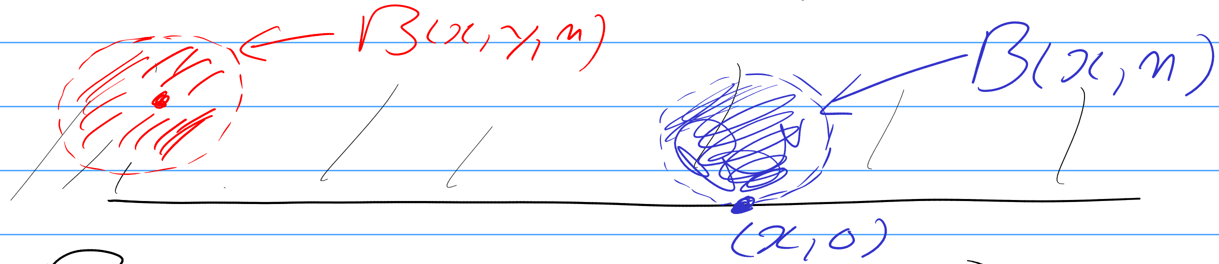
② $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{T}$

DAT VOLGT UIT DE VIERDE EIS

VOOR ELKE $y \in B$ IS ER EEN $D \in \mathcal{B}_y$ MET $D \subseteq B$

VOORBEELD

$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$

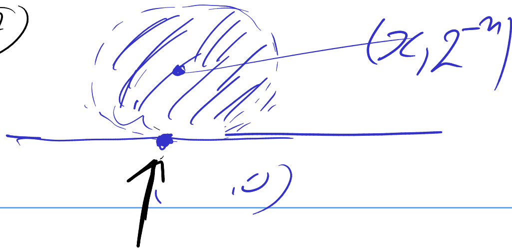


• $\mathcal{B}_{(x,y)}$ ALS $y > 0$

$\mathcal{B}_{(x,y)} = \{B(x,y,n) : n \in \mathbb{N}\}$

$B(x,y,n) = \{u \in X : \|u - (x,y)\| < 2^{-n}\}$

• $\mathcal{B}_{(x,0)} = \{B(x,n) : n \in \mathbb{N}$

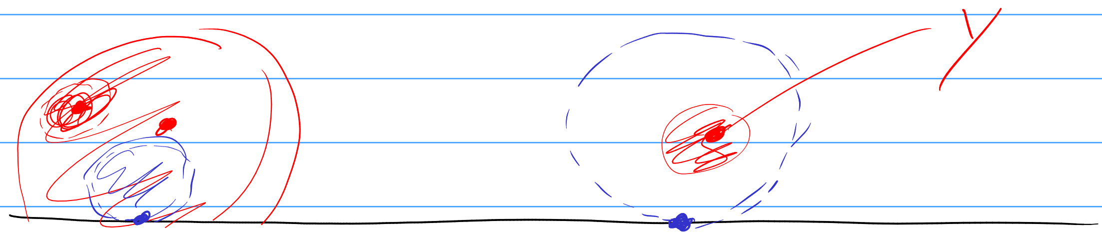


$$B(x,n) = \{(x,0)\} \cup \{\underline{u} \in X : \|\underline{u} - (x,2^{-n})\| < 2^{-n}\}$$

"DE x-AS IS EEN KADE
BOVEN DE x-AS IS WATER
JE KUNT IN HET WATER
SPRINGEN, MAAR NIET
LINKS OF RECHTS SCHUIVEN"

N: NIEMYTZKI-VLAK.

∇ DIT IS WEL EEN 'GOEDE' TOEKENNING VAN LOKALE BASES.

- ✓ $\mathcal{B}_x \neq \emptyset$
- ✓ $x \in B$
- ✓ ALS $B_1, B_2 \in \mathcal{B}_x$ DAN $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}_x$
- ✓ 

$\mathcal{T}_T$: BASIS : $\{X\}$

$\mathcal{B}_x = \{X\}$

$\mathcal{T}_D$: $\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\}$

$\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$

- X WILLEKEURIG.

x_0 VAST PUNT IN X

$\mathcal{B}_x = \{\{x\}\}$ $\quad x \neq x_0$

$\mathcal{B}_{x_0} = \{X \setminus F : F \text{ EINDIG},\ x_0 \notin F\}$

"$y \in B$" $\quad y = x$ ALS $B = \{x\}$

x_0 : $y \in X \setminus F$

- $\{y\} \subseteq X \setminus F$ ALS $y \neq x_0$
- $X \setminus F \subseteq X \setminus F$ ALS $y = x_0$

$A(X)$

AFT BASIS

AFT DICHTE DEELVERZ.

AFT. LOKALE BASIS (IN ELK PUNT)

HAUSDORFF

1° AFTELBAARHEIDSAXIOMA.
IN ELK PUNT IS ER EEN AFTELB. LOKALE BASIS

METRISCHE RUIMTEN, SORGENFREY, NIEMYTZKI-VLAK.

- $A(X)$ NIET ALTIJD
  BIJV $A(\mathbb{R})$ MET $x_0 = 0$

  STEL $\mathcal{B}_0$ IS EEN AFT. LOKALE BASIS $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$
  - B_n IS OPEN $0 \in B_n$ DUS IS ER EEN EINDIGE F_n MET $0 \in \mathbb{R} \setminus F_n \subseteq B_n$
    DAN IS $\mathbb{R} \setminus B_n$ EINDIG.

  NEEM $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, DIE IS AFT.

  NEEM $a \in \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \cup \{0\}\right)$

  - DAN IS $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ OPEN EN $0 \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$
    MAAR $B_n \not\subseteq \mathbb{R} \setminus \{a\}$ VOOR ALLE n.

2° AFTELBAARHEIDS AXIOMA

DE TOPOLOGIE HEEFT EEN AFTELBARE BASIS

$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, ---, $\mathbb{R}^n$, ---

SEPARABELE METR. RUIMTEN.

'AFT BASIS + "EXTRA EIGENSCHAP" GEEFT: METRISCH

NIET: $\mathbb{S}$, NIEMYTZKI-VLAK

$A(\mathbb{R})$

STELLING:

2° AFT. AX $\Longrightarrow$ 1° AFT. AX.

STEL $\mathcal{B}$ IS EEN BASIS

DEF $\mathcal{B}_x = \{ B \in \mathcal{B} : x \in B \}$

DAT ZYN LOKALE BASES

ALS $\mathcal{B}$ AFT IS ZYN DE $\mathcal{B}_x$-EN HET DUS OOK.

RADIALE TOPOLOGIE OP $\mathbb{R}^2$

$O \in \mathcal{T} \iff \left(\begin{array}{l} O \cap \ell \text{ IS OPEN IN } \ell \\ \text{VOOR ELKE LIJN } \ell \end{array} \right)$

BASIS? ~~LASTIG~~

LOKALE BASIS? LASTIG.

OPGAVE: DEZE IS SEPARABEL.

$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ IS DICHT.

SUBBASIS:

$\mathcal{T}$ EEN TOPOLOGIE

$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$ IS EEN SUBBASIS

ALS $\{\bigcap \mathcal{S}' : \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}, \text{ EINDIG}\}$

EEN BASIS IS.

$\mathbb{R}$: $\{(\leftarrow, a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \rightarrow) : a \in \mathbb{R}\}$

$(\leftarrow, b) \cap (a, \rightarrow) = (a, b)$

$\mathbb{S}$ $\{(\leftarrow, b) : b \in \mathbb{R}\} \cup \{[a, \rightarrow) : a \in \mathbb{R}\}$

$(\leftarrow, b) \cap [a, \rightarrow) = [a, b)$.

ELKE FAMILIE KAN DIENEN ALS SUBBASIS VOOR EEN TOPOLOGIE

$$\mathcal{S} \rightsquigarrow \mathcal{B} = \{\textstyle\bigcap \mathcal{S}' : \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S} \text{ eindig}\} \cup \{X\}$$

VOLDOET AAN EISEN VAN "BASIS"

NB $\bigcap \emptyset = X$

EN BEPAALT DUS EEN TOPOLOGIE $\mathcal{T}$

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$$

$$\mathcal{S} = \{X \setminus \{x\} : x \in X\}$$

IS EEN SUBBASIS VOOR DE CO-EINDIGE TOPOLOGIE OP X.