CONTINUÏTEIT

GEGEVEN RUIMTEN $(X, \mathcal{T}_1)$ EN $(Y, \mathcal{T}_2)$
EEN AFB $f : X \longrightarrow Y$
IS CONTINU IN $x \in X$ ALS
VOOR ELKE OMGEVING V VAN $f(x)$
ER EEN OMGEVING U VAN x
IS ZÓ DAT

$$f[U] \subseteq V$$

METRISCH: EQUIVALENT MET ε-δ-DEF.

ε-$\delta \Longrightarrow V$-U

GEGEVEN V NEEM $\varepsilon > 0$
MET $B(f(x), \varepsilon) \subseteq V$
DAARBIJ NEMEN WE δ EN
$U = B(x, \delta)$
$(\forall y)\,(d(x,y) < \delta \Rightarrow \varrho(f(y), f(x)) < \varepsilon)$
HIER STAAT $f[U] \subseteq B(f(x), \varepsilon) \subseteq V$

V-$U \Longrightarrow \varepsilon$-$\delta$

GEGEVEN $\varepsilon > 0$ ZIJ $V = B(f(x), \varepsilon)$
DAARBIJ NEMEN WE U EN
DAARBIJ $\delta > 0$ MET $B(x, \delta) \subseteq U$.
DAN $f[B(x,\delta)] \subseteq f[U] \subseteq V = B(f(x), \varepsilon)$
$(\forall y)\,(d(y,x) < \delta \Longrightarrow \varrho(f(y), f(x)) < \varepsilon)$

EQUIVALENT ZIJN:

- f IS CONTINU IN x
- VOOR ELKE OMGEVING V VAN $f(x)$ IS $f^{-1}[V]$ EEN OMGEVING VAN x.
- VOOR ELKE <u>OPEN</u> OMGEVING V VAN $f(x)$ IS ER EEN OPEN OMGEVING U VAN x MET $f[U] \subseteq V$.
- ALS $\mathcal{B}$ EEN LOKALE BASIS IN x IS EN $\mathcal{C}$ EEN LOKALE BASIS IN $f(x)$ DAN GELDT $\forall C \in \mathcal{C}\ \exists B \in \mathcal{B}\ f[B] \subseteq C$
- VOOR ELKE DEELVERZ A VAN X GELDT ALS $x \in \overline{A}$ DAN $f(x) \in \overline{f[A]}$

$\Longrightarrow$ (STEL $x \in \overline{A}$ EN) STEL $f(x) \notin \overline{f[A]}$

DAN IS $V = Y \setminus \overline{f[A]}$ OPEN

EN $f(x) \in V$

NEEM EEN (OPEN) OMG U VAN x MET $f[U] \subseteq V$.

DAN GELDT $U \cap A = \emptyset$

ALS $z \in U$ DAN $f(z) \notin f[A]$

DUS $z \notin A$

DUS TOCH $x \notin \overline{A}$

$\Longleftarrow$ STEL V IS EEN OMG. VAN $f(x)$

BEKIJK $B = Y \setminus V$

EN $A = f^{-1}[B]$

DAN $f[A] \subseteq B$

DUS $f(x) \notin \overline{f[A]}$ $(V \cap f[A] = \emptyset)$

EN DUS $x \notin \overline{A}$

DWZ $U = X \setminus \overline{A}$ IS OPEN

EN $x \in U$.

EN OOK $f[U] \subseteq V$.

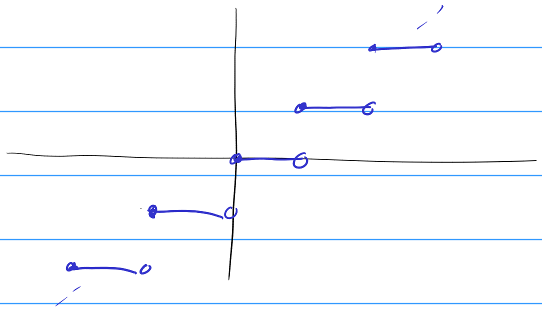
WE NOEMEN $f: X \to Y$
CONTINU op X
ALS f CONTINU IS IN ELK punt VAN X.

EQUIVALENT ZIJN

- f IS CONTINU op X
- VOOR ELKE $O \in \mathcal{T}_2$ GELDT $f^{-1}[O] \in \mathcal{T}_1$
- VOOR ELKE GESLOTEN F IN Y IS $f^{-1}[F]$ GESLOTEN IN X.
- VOOR ELKE $A \subseteq X$ GELDT $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$

$E: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ENTIER-FUNCTIE

$E(x) = \max\{z \in \mathbb{Z} : z \le x\}$



! CONTINU VAN GEWONE TOP NAAR SORGENFREY TOP.
NEE WANT $\mathbb{S}$ HEEFT MEER OPEN VERZ'N DAN $\mathbb{R}$ ZELF.

Bijv $E^{-1}[(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})] = [0, 1)$

$E^{-1}[[0, 1)]$ NIET OPEN IN $\mathbb{R}$

! CONTINU VAN $\mathbb{S}$ NAAR $\mathbb{R}$

! $E^{-1}[O] = \bigcup\{[z, z+1) : z \in \mathbb{Z} \cap O\}$
IS OPEN IN $\mathbb{S}$

ZELFS CONTINU VAN $\mathbb{S}$ NAAR $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_D)$

BEKIJK WAT ER GEBEURT TOV INDISCRETE, DISCRETE, CO-EINDIGE TOPOLOGIE...

STELLING

LAAT $(X, \mathcal{T}_1)$ EN $(Y, \mathcal{T}_2)$ RUIMTEN ZIJN, $\mathcal{B}$ EEN BASIS VOOR $\mathcal{T}_2$ EN $\mathcal{S}$ EEN SUBBASIS VOOR $\mathcal{T}_2$.

DAN ZIJN EQUIVALENT VOOR $f : X \to Y$

(1) f IS CONTINU

(2) VOOR ELKE $B \in \mathcal{B}$ GELDT $f^{-1}[B] \in \mathcal{T}_1$

(3) VOOR ELKE $S \in \mathcal{S}$ GELDT $f^{-1}[S] \in \mathcal{T}_1$

BEWIJS

(1) ⟹ (2) DUIDELIJK: $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_2$

(1) ⟹ (3) OOK DUIDELIJK: $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}_2$

(2) ⟹ (1) STEL $O \in \mathcal{T}_2$
NEEM $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ MET $O = \bigcup \mathcal{B}'$
DAN $f^{-1}[O] = \bigcup \{ \underline{f^{-1}[B]} . B \in \mathcal{B}' \} \in \mathcal{T}_2$

(3) ⟹ (1) WE WETEN DAT
$\mathcal{C} = \{ \bigcap \mathcal{S}' : \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}, \text{EINDIG} \}$
EEN BASIS VOOR $\mathcal{T}_2$
EN VOOR ELKE $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ EINDIG
GELDT $f^{-1}[\bigcap \mathcal{S}'] = \bigcap \{ \underline{f^{-1}[S]} : S \in \mathcal{S}' \} \in \mathcal{T}_2$
PAS (2) ⟹ (1) TOE

OPGAVE

$(X, \mathcal{T})$ EEN RUIMTE S DE SIERPIŃSKI-RUIMTE NEEM $A \subseteq X$
STEL $\chi_A : X \to S$ IS CONTINU
WAT ZEGT DAT VOOR A?

Als $f: X \longrightarrow Y$ een afb is
dan is f

<u>open</u>: als voor elke open $O \subseteq X$
het beeld $f[O]$ open is.

<u>gesloten</u>: als voor elke gesloten $F \subseteq X$
het beeld $f[F]$ gesloten is.

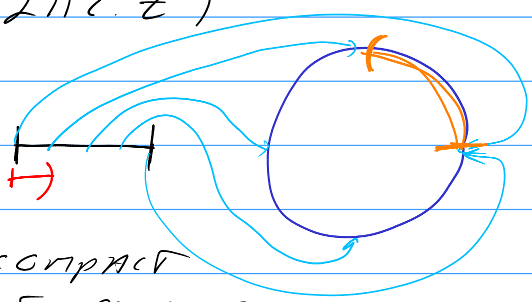
$f: X \longrightarrow Y$ is open
$\Longleftrightarrow$ $f[B]$ is open
voor elke B
in een basis

$f[\bigcup \mathcal{A}] = \bigcup\{f[A] : A \in \mathcal{A}\}$

(1) $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$
$f(x,y) = x$
- f is continu
- f is open
  $f[B((x,y),\varepsilon)] = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$
- f is <u>niet</u> gesloten

$F = \{(x,y) : xy = 1\}$
is gesloten
$f[F] = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
is <u>niet</u> gesloten

(2) $X = [0,1]$ $Y = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$
$f(t) = \exp(2\pi i t)$
- f is continu
- f is gesloten
  X compact dus
  als F gesl. is is F compact
  dvs $f[F]$ is compact dus gesloten.



- f is niet open
  $[0,\frac{1}{4})$ is open in $[0,1]$
  $f[[0,\frac{1}{4})]$ = boog van 1 naar i
  inclusief 1 exclusief i
  niet open in S^1
  er is geen $\varepsilon > 0$ met
  $B(1,\varepsilon) \subseteq f[[0,\frac{1}{4})]$

③ $X = \{0,1\}$ met $\mathcal{T}_D$ (discreet)
$Y = \{0,1\}$ met $\mathcal{T}_I$ (indiscreet)
$f : X \to Y$ geg door $f(x) = x$.

- f is continu
  [altijd als het domein de discrete top heeft]
- f is niet open $f[\{0\}]$
- f is niet gesloten $f[\{0\}]$

$Y = \mathbb{R}$ met gewone top.
$X = \mathbb{R}$ met $\mathcal{T}_{CE}$
Bewys als $f : X \to Y$ continu is dan is f constant.

Nog steeds:
Homeomorfisme: bijectie die continu is <u>en</u> de inverse <u>ook</u>

Quotiënt afbeeldingen.

[G groep N normaaldeler

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & H \\ & G/N \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Als $N \subseteq \operatorname{Ker} f$
dan is er een hom. $h : G/N \to H$
met $h \circ q = f$]

Twee ruimten $(X, \mathcal{T}_1)$ en $(Y, \mathcal{T}_2)$

$f : X \longrightarrow Y$

- De familie $\mathcal{T}_f = \{ O \subseteq Y : f^{-1}[O] \in \mathcal{T}_1 \}$ is een topologie op Y
- Zo kun je f continu maken van $(X, \mathcal{T}_1)$ naar $(Y, \mathcal{T}_f)$ dus
- $f : (X, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (Y, \mathcal{T}_2)$ is continu desda als $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_f$

  $\mathcal{T}_f$ is de grootste topologie die f continu maakt.

- Als $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_f$ dan noemen we $f : (X, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_2)$ een quotiënt afbeelding.

  (dus als $O \in \mathcal{T}_2 \iff f^{-1}[O] \in \mathcal{T}_1$)

  $\longrightarrow$ continu

Stel $g : X \longrightarrow Y$ is quotiënt.
Dan geldt

als $f : Y \longrightarrow Z$ een afb.
met Z ook een ruimte

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f \circ g"] \arrow[dr, "g"'] & & Z \\
& Y \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

$Y \longleftarrow$ quotiëntruimte

Dan f is continu desda $f \circ g$ is continu

$\longrightarrow$ reken na: composities van continue afb'n zijn continu

$\Leftarrow$ STEL $O \subseteq Z$ IS OPEN

DAN $q^{-1}[f^{-1}[O]] = (f \circ q)^{-1}[O]$

$f \circ q$ IS CONT. DUS RECHTERKANT OPEN

EN DUS $q^{-1}[f^{-1}[O]]$ OOK

q IS QUOTIENT : $f^{-1}[O]$ IS OPEN IN Y.

[OPGAVE
OPEN AFB'N EN GESLOTEN AFB'N
ZYN QUOTIENT AFB'N.]

$(\forall x \in A) \quad B(x,\varepsilon) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$

DIT BETEKENT $\operatorname{INT} A = \emptyset$

GESLOTEN : COMPLEMENT IS OPEN.

[ALS $\forall \varepsilon > 0 \quad B(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$
DAN $x \in A$]