AM 3590 2020-10-31

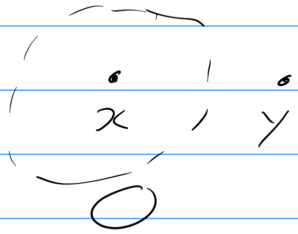
SCHEIDINGSEIGENSCHAPPEN

X, $\mathcal{T}$ – DE TOPOLOGIE

T_0 ALS $x \neq y$ DAN $\{O \in \mathcal{T} : x \in O\}$
$\neq \{O \in \mathcal{T} : y \in O\}$

VOOR ELKE $x \neq y$ IS ER EEN O
ZÓDAT $O \cap \{x, y\}$ UIT EEN
PUNT BESTAAT.

PLAATJE:

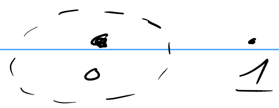


OF

T_1: EN

INDISCR. TOP **NIET**

SIERPIŃSKI RUIMTE **WEL**



$\mathbb{R}$ MET $\mathcal{T}_R = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, \rightarrow) : a \in \mathbb{R}\}$
ZYN ALLEBEI ($\mathcal{T}_L$ OOK). T_0

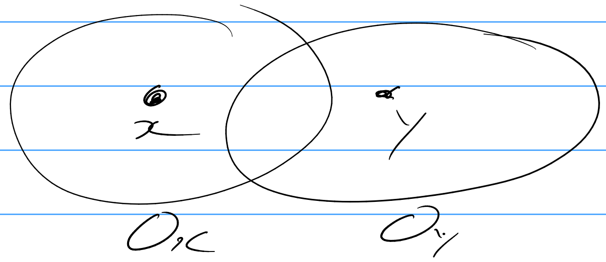
KARAKTERISERING: $x \neq y \Rightarrow \overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$

S: $\overline{\{0\}} = \{0, 1\}$, $\overline{\{1\}} = \{1\}$

IN $\mathcal{T}_R$: $\overline{\{x\}} = (\leftarrow, x]$

THEORETISCHE INFORMATICA!
SEMANTIEK VAN TALEN

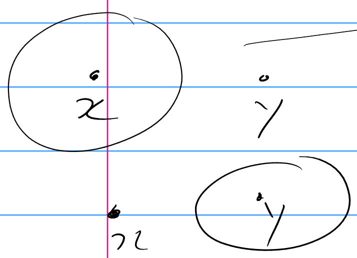
T_1 : ALS $x \neq y$ DAN ZIJN ER OPEN O_x EN O_y MET $x \in O_x \not\ni y$ EN $y \in O_y \not\ni x$



SIERPIŃSKI EN $\mathcal{T}_R$ EN $\mathcal{T}_L$ NIET

$\mathcal{T}_{CE}$ WEL ALS $x \neq y$ NEEM

$$O_x = X \setminus \{y\} \qquad O_y = X \setminus \{x\}$$



$(X, \mathcal{T})$ IS T_1 DESDA VOOR ELKE x GELDT $\{x\} = \bigcap \{O \in \mathcal{T} : x \in O\}$

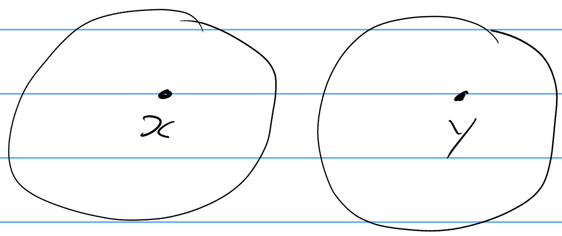
DESDA VOOR ELKE x IS $\{x\}$ GESLOTEN

DESDA $\mathcal{T}_{CE} \subseteq \mathcal{T}$

ALLE ANDERE RUIMTEN DIE WE KENNEN, METRISCH, $\mathbb{S}$, $\mathbb{N}$, RADIALE CO-AFT..
ALLEMAAL T_1.

T_2

HAUSDORFF



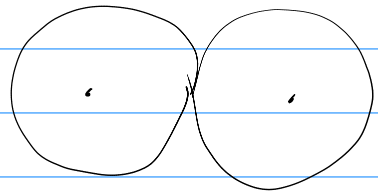
ALS $x \neq y$ DAN ZIJN ER O_x EN O_y MET $x \in O_x$, $y \in O_y$ EN $O_x \cap O_y = \emptyset$.

$(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{CE})$ NIET T_2
$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{CA})$ NIET T_2

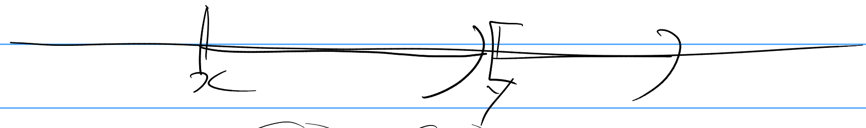
GEEN NIET-LEGE DISJUNCTE OPEN VERZ'N

WEL: DE REST $\mathbb{S}$, $\mathbb{N}$, RADIAAL

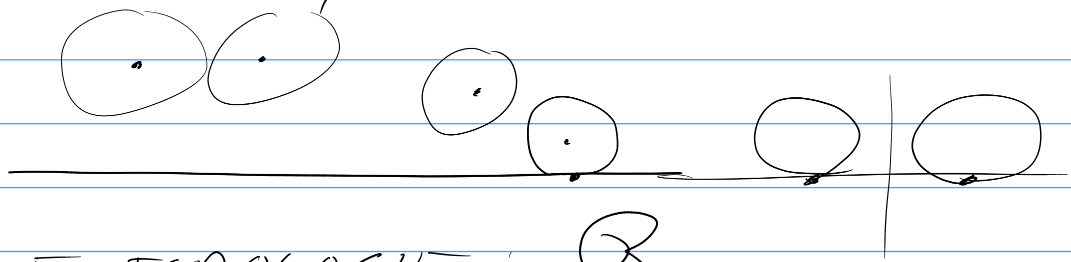
METR.R $B(x, \frac{1}{2}d(x,y))$, $B(y, \frac{1}{2}d(x,y))$



$\mathbb{S}$



$\mathbb{N}$:



RADIALE TOPOLOGIE: $\mathcal{R}$

ALS O GEWOON OPEN IS IN $\mathbb{R}^2$
DAN $O \in \mathcal{R}$

<u>DUS</u> $(\mathbb{R}^2, \mathcal{R})$ IS T_2

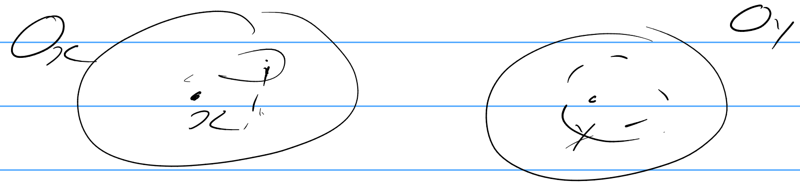
STELLING $\mathcal{T}_1$ EN $\mathcal{T}_2$ TOPOLOGIEËN
ALS $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ EN $\mathcal{T}_1$ IS HAUSDORFF
DAN IS $\mathcal{T}_2$ HET OOK

STELLING: $(X, \mathcal{T})$ IS HAUSDORFF
DESDA VOOR ELKE x GELDT
$$\{x\} = \bigcap \{\overline{O} : O \in \mathcal{T}, x \in O\}$$

Een rij $(x_n)_n$ in X convergeert naar x als
voor elke omgeving U van x
er een N is zó dat
voor $n \geq N$ geldt $x_n \in U$.

Stelling in een T_2-ruimte zijn limieten uniek.

Stel $x_n \longrightarrow x$ en $x_n \longrightarrow y$
en $x \neq y$.



$n \geq N_1 : x_n \in O_x$ $\qquad$ $n \geq N_2 : x_n \in O_y$

Tegenspraak.

In $(\mathbb{N}, \mathcal{T}_{cE})$ convergeert de rij $(n)_n$ naar elk punt van $\mathbb{N}$.

! Stel $f, g : X \longrightarrow Y$ is continu
en Y is een Hausdorffruimte
Dan is

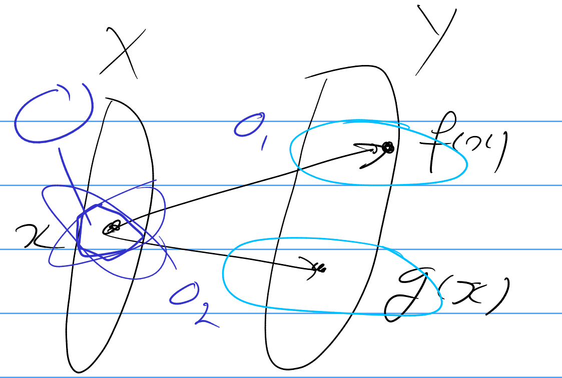
$$\{x : f(x) = g(x)\}$$

gesloten.

($\{x : f(x) \neq g(x)\}$ is open)

Gevolg: als er een dichte verzameling D is zó dat
$f(x) = g(x)$ voor $x \in D$
dan $f = g$.

$\{x : f(x) = g(x)\} \supseteq \overline{D} = X$



STEL $f(x) \neq g(x)$

NEEM open O_1 EN O_2

MET

$f(x) \in O_1$, $g(x) \in O_2$

EN $O_1 \cap O_2 = \emptyset$

BEKIJK $O = f^{-1}[O_1] \cap g^{-1}[O_2]$

- O is open
- $x \in O$
- Als $y \in O$ dan $f(y) \in O_1$ en $g(y) \in O_2$

  dus $f(y) \neq g(y)$

Dus $\{x : f(x) \neq g(x)\}$ is open.

STEL $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ IS CONTINU EN VOLDOET AAN $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

DAN IS f LINEAIR, DUS OOK

$$f(\lambda x) = \lambda f(x) \quad \text{VOOR ALLE } \lambda \text{ EN } x$$

? $f(\pi x) = \pi f(x)$?

- $f(nx) = f(\underbrace{x + x + \cdots + x}_{n}) = \underbrace{f(x) + f(x) + \cdots + f(x)}_{n} = n f(x)$
- $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$

  $f(-x) = -f(x)$
- ZO OOK $f(\frac{1}{n} x) = \frac{1}{n} f(x)$
- DAN $f(qx) = q f(x) \quad q \in \mathbb{Q}$

IHB GELDT $f(q) = f(q \cdot 1) = q \cdot f(1)$

NEEM NU $g : g(x) = f(1) \cdot x$

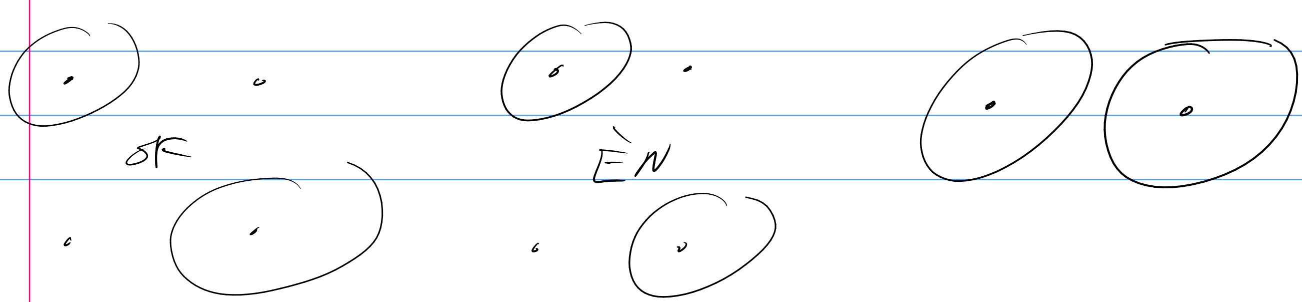
- f EN g ZIJN CONTINU
- $\{x : f(x) = g(x)\} \supseteq \mathbb{Q}$

DUS $f = g$ EN $f(x) = x \cdot f(1)$ ALLE x.

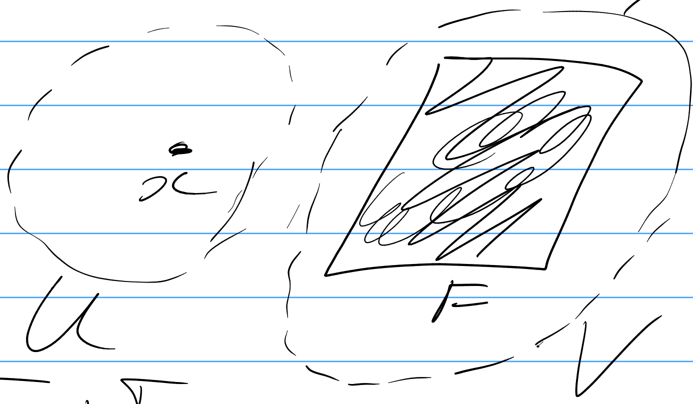
VOOR $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$:

f BEWAART $\mathbb{Q}$-LINEAIRE COMBINATIES

T_0 $\qquad$ T_1 $\qquad$ T_2

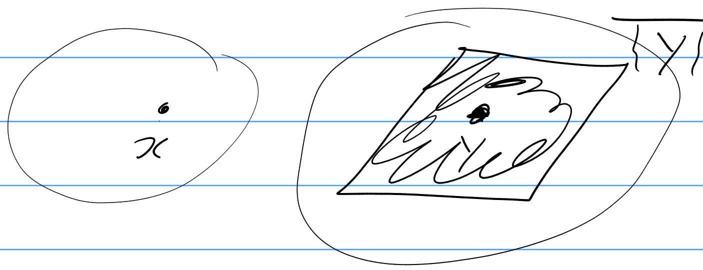


T_3 : $(X, \mathcal{T})$ is een T_3-ruimte als voor elke gesloten F en elke $x \in X \setminus F$ er open verz'n U en V zijn met $x \in U$, $F \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$



Regulier: $\underline{T_0 + T_3}$

Regulier $\Longrightarrow$ Hausdorff



[Als $x \in \overline{\{y\}}$ dan $\overline{\{x\}} \subseteq \overline{\{y\}}$]

Regulier $\xrightarrow[\not\leftarrow]{}$ Hausdorff $\xrightarrow[\not\leftarrow]{}$ T_1 $\xrightarrow[\not\leftarrow]{}$ T_0

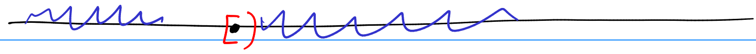
Voorbeelden:

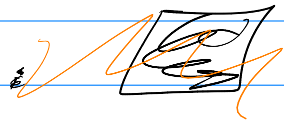
Metrische ruimten:

Neem $\varepsilon > 0$ met $B(x, \varepsilon) \subseteq X \setminus F$.

Neem $U = \{y : d(x,y) < \varepsilon/3\}$

$V = \{y : d(x,y) > 2\varepsilon/3\}$

$\mathbb{S}$ 



ALS $x \notin F$ DAN
IS ER EEN $a > x$
ZÓDAT $[x,a) \cap F = \emptyset$
$U = [x,a)$ EN $V = (\leftarrow, x) \cup [a, \rightarrow)$
OPEN-EN-GESLOTEN IN $\mathbb{S}$ $\quad (= \mathbb{R}\setminus U)$

St '$(X, \mathcal{T})$ IS T_3 DESDA.
VOOR ELKE $x \in X$ EN ELKE OPEN U
MET $x \in U$ ER EEN OPEN V
IS MET $x \in V$ EN $\overline{V} \subseteq U$.

[METRISCHE RUIMTE! $\overline{B(x, \varepsilon/3)} \subseteq B(x, \varepsilon)$
$\mathbb{S}$ $\overline{[a,b)} = [a,b)$]

BEWIJS WERK MET COMPLEMENTEN
$\Longrightarrow$ GEGEVEN x EN U. NEEM $F = X \setminus U$.
NEEM OPEN
V EN W
MET $x \in V$, $F \subseteq W$
$V \cap W = \emptyset$

$\overline{V} \subseteq \underbrace{X \setminus W}_{\text{GESL.}} \subseteq U$

$\Longleftarrow$ GEGEVEN x EN F
BEKIJK $U = X \setminus F$.

VOORBEELD:

BEGIN MET $\mathbb{R}$ MET DE GEWONE TOP. $\mathcal{T}$.
MAAK EEN NIEUWE TOPOLOGIE $\mathcal{T}_a$
DOOR $C = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ ALS EXTRA
GESLOTEN VERZ. TOE TE VOEGEN.
GEBRUIK

$$\mathcal{T} \cup \{\mathbb{R} \setminus C\}$$

ALS (SUB) BASIS VOOR $\mathcal{T}_a$

- $\mathcal{T}_a$ IS HAUSDORFF
- C IS GESLOTEN
- $0 \notin C$
- EEN BASIS OMG VAN 0
  IS VAN DE VORM $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus C$
- BEWYS NU DAT DE AFSLUITING
  VAN $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus C$ IN $\mathcal{T}_a$
  GELYK IS AAN $\overline{[-\varepsilon, \varepsilon]}$.
- 0 HEEFT GEEN OMG. V
  MET $\overline{V} \subseteq \mathbb{R} \setminus C$.