AM 3590 2020-11-03 ©

$\mathrm{cl}\,\emptyset = \emptyset \qquad A \subseteq \mathrm{cl}\,A$

$\mathrm{cl}(A \cup B) = \mathrm{cl}\,A \cup \mathrm{cl}\,B$

$\mathrm{cl}\,\mathrm{cl}\,A = \mathrm{cl}\,A \Longleftarrow$ is voor $\mathrm{cl}\,A = \overline{A}$

Als $\mathrm{cl}\,F = F \quad (F \in \mathcal{A})$

dan

$$\mathrm{cl}\left(\bigcap \mathcal{A}\right) = \bigcap \mathcal{A}$$

- $\bigcap \mathcal{A} \subseteq \mathrm{cl} \bigcap \mathcal{A}$

- $\mathrm{cl} \bigcap \mathcal{A} \subseteq \bigcap \mathcal{A}$

  neem $F \in \mathcal{A}$

  dan $\bigcap \mathcal{A} \subseteq F$

  $\mathrm{cl}\,F = \mathrm{cl}\left(F \cup \bigcap \mathcal{A}\right)$

  $= \mathrm{cl}\,F \cup \mathrm{cl} \bigcap \mathcal{A}$

  dus $\mathrm{cl} \bigcap \mathcal{A} \subseteq \mathrm{cl}\,F$

  dus $\mathrm{cl} \bigcap \mathcal{A} \subseteq F$ want $\underline{F = \mathrm{cl}\,F}$

F was willekeurig.

QUOTIËNT AFBEELDINGEN.

$$f : \underset{\mathcal{T}_1}{X} \longrightarrow \underset{\mathcal{T}_2}{Y}$$

BIJ f HOORT EEN TOP OP Y
BEPAALD DOOR

$$\mathcal{T}_f = \{ O : f^{-1}[O] \in \mathcal{T}_1 \}$$

f IS CONTINU $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_f$

DEFINITIE f IS QUOTIËNT ALS $\underline{\mathcal{T}_f = \mathcal{T}_2}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f \circ g"] \arrow[dr, "g"'] & & Z \\
& Y \arrow[ur, dashed, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

<u>QUOTIËNT</u>

f IS CONTINU $\Longleftrightarrow$ $f \circ g$ IS CONTINU

ZONDER $\mathcal{T}_2$ KAN IK $\mathcal{T}_f$ DEFINIËREN

OP DEZE MANIER KAN IK
NIEUWE RUIMTEN MAKEN:

ALS $(X, \mathcal{T})$ EEN TOP RUIMTE IS
EN $f : X \longrightarrow Y$ EEN AFB
DAN IS $(Y, \mathcal{T}_f)$ EEN
TOP. RUIMTE.

$(X, \mathcal{T})$ EEN TOPOLOGISCHE RUIMTE

R EEN EQUIVALENTIERELATIE op X.
(xRx , $xRy \Leftrightarrow yRx$, $xRy \wedge yRz \rightarrow xRz$)
DE VERZ EQ. KLASSEN
SCHRIJVEN WE ALS X/R
KLASSE VAN x : $[x]_R$

VB op $\mathbb{R}$: xRy ALS $x - y \in \mathbb{Z}$
DE EQ KLASSEN ZIJN DE
NEVENKLASSEN VAN $\mathbb{Z}$
(CO-SETS)

STEL $(X, \mathcal{T})$ IS EEN RUIMTE
EN $A \subseteq X$ DEFINIEER
$xRy \Leftrightarrow x = y$ OF $x, y \in A$.
EQ. KLASSEN:
$[x]_R = \{x\}$ ALS $x \notin A$
$[x]_R = A$ ALS $x \in A$

VAN X/R MAKEN WE EEN
TOPOLOGISCHE RUIMTE VIA
DE QUOTIËNT AFB $q : X \longrightarrow X/R$
$x \longmapsto [x]_R$

WE GEBRUIKEN $\mathcal{T}_q$.

WAT IS HET RESULTAAT?

DE RELATIE $x - y \in \mathbb{Z}$ GEEFT
EEN BEKENDE RUIMTE

NAMELYK: DE CIRKEL.

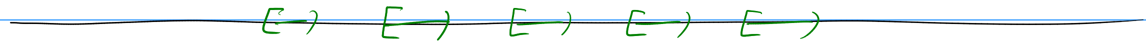
HOE KUNNEN WE $\mathbb{R}/R$ ZIEN?

- ELK PUNT IS EQUIVALENT MET ÉÉN PUNT IN $[0,1)$
- $\mathbb{R}/R$ KUNNEN WE ZIEN ALS $[0,1)$
- WAT IS $\mathcal{T}_q$?

! . NIET DE DEELR. TOP VAN $\mathbb{R}$

BIJV $[0,\frac{1}{2})$ IS OPEN IN DEELR. TOP

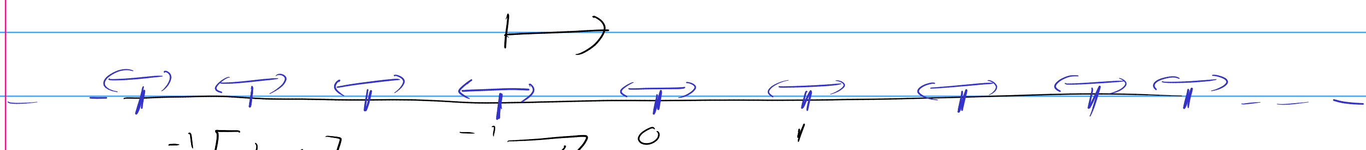
MAAR $q^{-1}[[0,\frac{1}{2})] =$



$\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} [m, m+\frac{1}{2})$

IS NIET OPEN IN $\mathbb{R}$

- HOE ZIET EEN OMG. VAN 0 ER UIT?



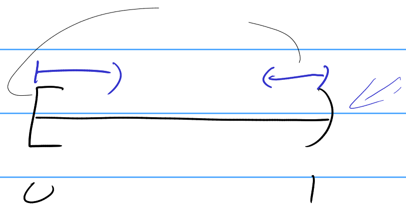
$q^{-1}[\{0\}] = \mathbb{Z}$

ALS O OPEN IS IN $\mathcal{T}_q$ EN $0\in O$

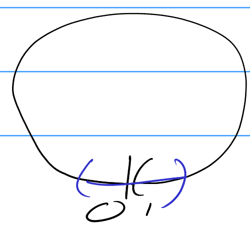
DAN IS $q^{-1}[O]$ OPEN IN $\mathbb{R}$ EN $\mathbb{Z} \subseteq q^{-1}[O]$

(NB $x\in q^{-1}[O]$ EN $x-y\in\mathbb{Z}$ DAN $\Rightarrow y\in q^{-1}[O]$)

DIE $q^{-1}[O]$ IS HET VOLL. ORIG. VAN



BETER PLAATJE



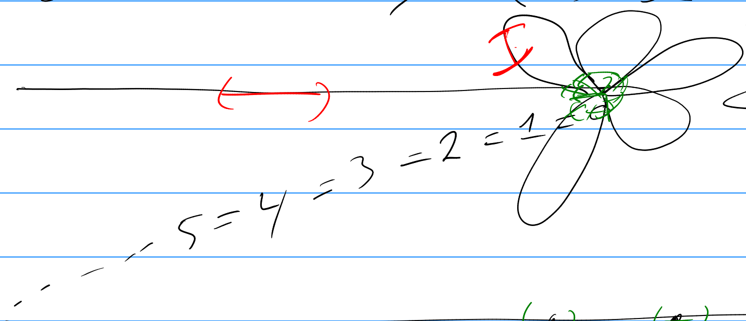
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \longmapsto \exp(2\pi i t)$$

BEELDT $\mathbb{R}$ AF OP DE CIRKEL S^1

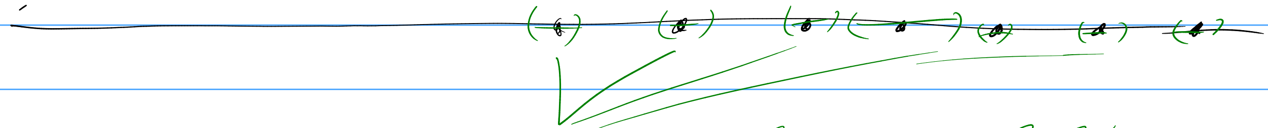
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "q"'] & & S^1 \\ & \mathbb{R}/R \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

$g \leftarrow$ IS EEN HOMEOMORFISME

VOORBEELD: WEER $\mathbb{R}$
EN $A = \mathbb{N}$
DUS $x R y \iff x = y$ OF $x, y \in \mathbb{N}$



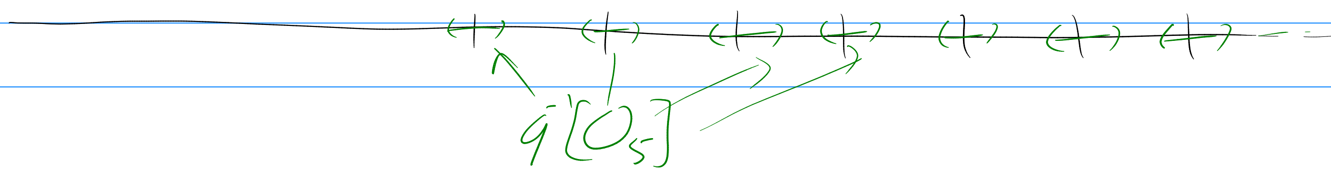
$\leftarrow$ ONEINDIG VEEL LUSSEN



MOGEN ALLEMAAL VERSCH. LENGTE HEBBEN

$\mathbb{R}/\mathbb{N}$ — $\mathbb{N}$ IS TOT ÉÉN PUNT SAMENGEKNEPEN.

IN $\mathbb{R}/\mathbb{N}$ HEEFT HET PUNT $\underline{\mathbb{N}}$ GEEN AFTELBARE LOKALE BASIS.
(NB $\mathbb{N} = \bigcap_n O_n$ WAARBIJ
O_n ZÓ IS DAT $q^{-1}[O_n] = \bigcup_{x \in \mathbb{N}} (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$)



STEL $\{O_n : n \in \mathbb{N}\}$ IS EEN AFTELBARE FAMILIE OPEN VERZ'N IN $\mathbb{R}/\mathbb{N}$ MET $\mathbb{N} \in O_n$ (ALLE n)

T.B. DIT IS GEEN LOKALE BASIS

TB ER IS EEN OPEN O ZÓ DAT

- $O_n \not\subseteq O$ VOOR ALLE n
- $\mathbb{N} \in O$

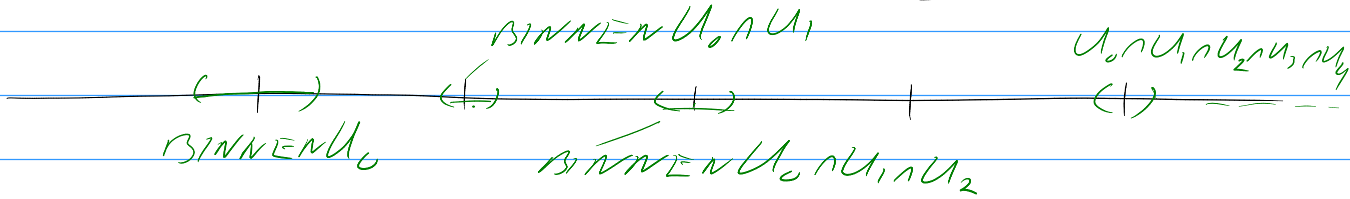
VERTAAL NAAR $\mathbb{R}$

$$U_n = q^{-1}[O_n] \text{ OPEN IN } \mathbb{R},\ \mathbb{N} \subseteq U_n.$$

NEEM $n \in \mathbb{N}$

EN KIES k_n ZÓ DAT

$$(n - 2^{-k_n}, n + 2^{-k_n}) \subseteq \bigcap_{i \le n} U_i$$



- $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n - 2^{-(k_n+1)}, n + 2^{-(k_n+1)})$
- U IS OPEN $\mathbb{N} \subseteq U$
- $U = q^{-1}[q[U]]$ DUS $q[U]$ IS OPEN IN $\mathbb{R}/\mathbb{N}$
- VOOR ELKE n GELDT

$$U_n \not\subseteq U$$

BIJV BIJ n:

$$\longrightarrow (n - 2^{-k_n}, n + 2^{-k_n}) \subseteq U_n$$

EN $\longrightarrow (n - 2^{-k_n}, n + 2^{-k_n}) \not\subseteq U$

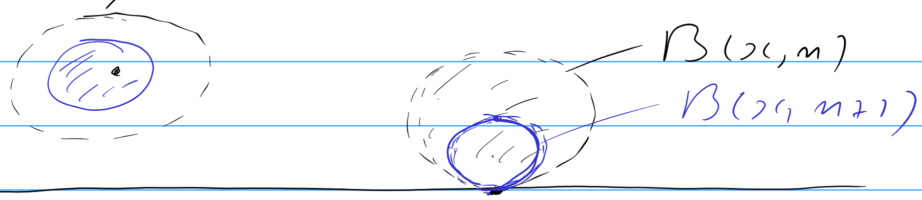
- DAN VOLGT

$$O_n \not\subseteq q[U]$$

VOOR ALLE n.

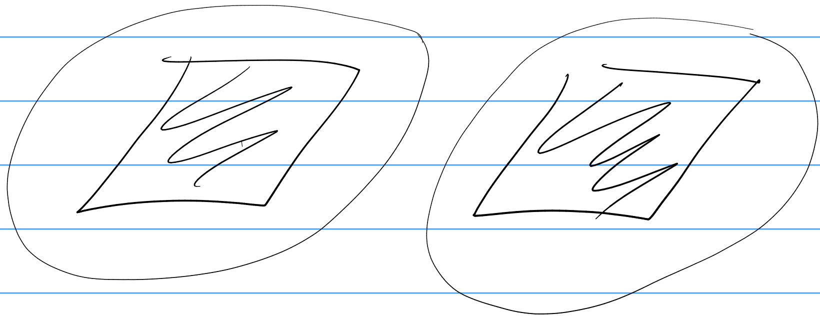
SCHEIDINGSEIGENSCHAPPEN.

- T_0, T_1, T_2 = Hausdorff   punten
- T_3, regulier ($= T_3 + T_0$)   punt - gesl. verz.
- vb van T_2-ruimte niet regulier
  $\mathbb{R}$ met $\{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ als extra
  gesloten verzameling.
- $\mathbb{R}$ met $\mathbb{Q}$ als extra open verz.
- $\mathbb{S}$ is regulier Sorgenfrey.
- Niemytzki-vlak ook



$\overline{B(x,n+1)} \subseteq B(x,n)$

T_4



Voor elk tweetal disjuncte gesloten verz'n F en G zijn er disjuncte open U en V met $F \subseteq U$ en $G \subseteq V$.

Normaal $= T_4 + T_1$

(Normaal $\rightarrow$ regulier)

METRISCHE RUIMTEN.

ALS F EN G GESLOTEN EN DISJ ZIJN
NEEM

$$U = \left\{x : \frac{d(x,F)}{d(x,F)+d(x,G)} < \frac{1}{2}\right\}$$

$$V = \left\{x : \frac{d(x,F)}{d(x,F)+d(x,G)} > \frac{1}{2}\right\}$$

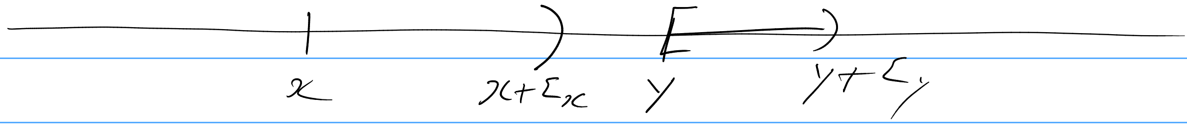
SORGENFREY LIJN.

GEGEVEN F EN G MAKEN
WE U EN V ALS VOLGT.

VOOR $x \in F$: $\varepsilon_x = \sup\{r > 0 : [x, x+r) \cap G = \emptyset\}$

$x \in G$: $\varepsilon_x = \sup\{r > 0 : [x, x+r) \cap F = \emptyset\}$

ALS $x \in F$ EN $y \in G$
DAN $[x, x+\varepsilon_x) \cap [y, y+\varepsilon_y) = \emptyset$



$y \notin [x, x+\varepsilon_x)$

$$U = \bigcup_{x\in F} [x, x+\varepsilon_x) \qquad V = \bigcup_{x \in G} [x, x+\varepsilon_x)$$

$\mathbb{R}/\mathbb{N}$ IS OOK NORMAAL

X IS T_4 DESDA VOOR ELKE GESLOTEN F
EN OPEN U MET $F \subseteq U$
ER EEN OPEN V IS MET
$F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

$\Longrightarrow$ GEGEVEN F EN U

NEEM $G = X \setminus U$.

IK VIND $V \supseteq F$ EN $O \supseteq G$

MET $V \cap O = \emptyset$

$F \subseteq V$, $\overline{V} \subseteq X \setminus O \subseteq U$

$\Longleftarrow$ GEGEVEN F EN G

NEEM $U = X \setminus G$.

VIND V MET

$F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$

NEEM $O = X \setminus \overline{V}$

DAN $G \subseteq O$

EN $V \cap O = \emptyset$.

EQUIVALENT ZIJN:

1. X IS T_4

2. ALS U EN V OPEN ZIJN MET $U \cup V = X$ DAN ZIJN ER GESLOTEN F EN G MET $F \subseteq U$, $G \subseteq V$ EN $F \cup G = X$.

3. ALS U EN V OPEN ZIJN MET $U \cup V = X$ DAN ZIJN ER OPEN O_u EN O_v MET $\overline{O_u} \subseteq U$, $\overline{O_v} \subseteq V$, $O_u \cup O_v = X$.

4. ALS F EN G GESLOTEN EN DISJUNCT ZIJN DAN ZIJN ER OPEN U EN V MET $F \subseteq U$, $G \subseteq V$, $\overline{U} \cap V = \emptyset$.

NIEMYTZKI-VLAK: NIET NORMAAL.

REGULIER + AFT. BASIS $\Longrightarrow$ NORMAAL

REGULIER + AFT BASIS $\Longrightarrow$ METRISEERBAAR