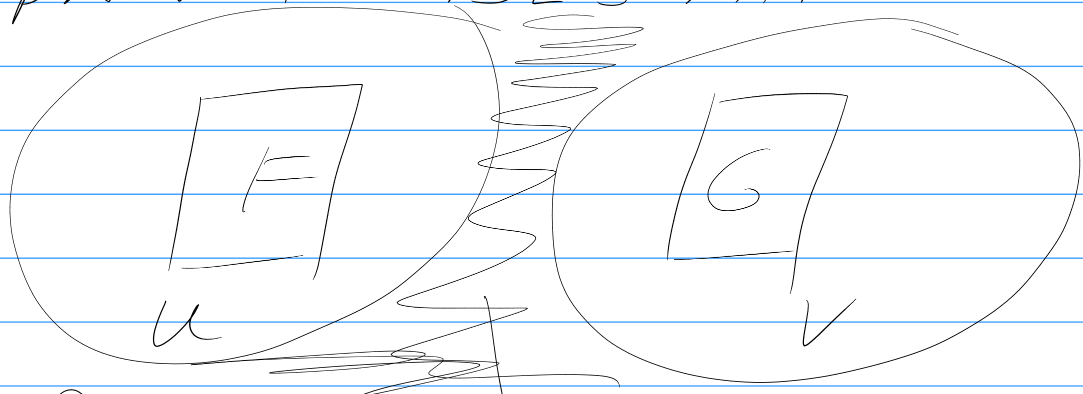
AM 3590 2020-11-06 (1)

Normaliteit (T_4)

NB $(X, \mathcal{T})$ is een T_4-ruimte desda tussen elk tweetal disjuncte gesl. verz'n een partitie bestaat



$P = X \setminus (U \cup V)$ is een partitie

P

N (Niemytzki-vlak)	$\mathbb{R}/\mathbb{N}$	$(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_R)$
$\boxed{\text{Regulier}}$	$\boxed{\text{Regulier?}}$	~~Regulier?~~
~~Normaal?~~	$\boxed{\text{Normaal?}}$	~~Normaal?~~

- $\mathbb{R}/\mathbb{N}$ is normaal
  - T_1 als $x \neq \mathbb{N}$ dan bestaat $q^{-1}[\{x\}]$ uit één punt en is dus gesloten.
    $q^{-1}[\{\mathbb{N}\}] = \mathbb{N}$ is gesloten
  - T_4 (1) de quotiënt afb $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{N}$ is gesloten
    Als $F \subseteq \mathbb{R}$ dan $q^{-1}[q[F]] = \begin{cases} F & F \cap \mathbb{N} = \emptyset \\ F \cup \mathbb{N} & F \cap \mathbb{N} \neq \emptyset \end{cases}$
    Als F gesloten is dan is $q^{-1}[q[F]]$ het ook, dus $q[F]$ is gesloten

(2) STELLING:

ALS X EEN T_4-RUIMTE IS
EN $f : X \to Y$ IS CONTINU, GESLOTEN EN SURJECTIEF
DAN IS Y OOK T_4

[NIET VOOR T_3 (REGULIER), T_2, T_1 ...]

BEWIJS

STEL F EN G ZIJN GESLOTEN EN DISJUNCT IN Y

BEKIJK $f^{-1}[F]$ EN $f^{-1}[G]$
DIE ZIJN GESLOTEN EN DISJ IN X

ER ZIJN OPEN U EN V IN X
MET $U \cap V = \emptyset$, $f^{-1}[F] \subseteq U$, $f^{-1}[G] \subseteq V$.

HOE TRANSPORTEREN WE U EN V NAAR Y?

[$\underbrace{f[U] \text{ EN } f[V]}$ GAAT NIET
WE WETEN NIET OF DIE OPEN ZIJN
OOK NIET OF ZE DISJ. ZIJN]

$X \setminus U$ EN $X \setminus V$ ZIJN GESLOTEN

DUS $f[X \setminus U]$ EN $f[X \setminus V]$ ZIJN DAT OOK

DUS $\underbrace{Y \setminus f[X \setminus U]}_{U_1}$ EN $\underbrace{Y \setminus f[X \setminus V]}_{V_1}$ ZIJN OPEN

$F \subseteq U_1$? JA WANT $f[X \setminus U] \cap F = \emptyset$
OMDAT $X \setminus U \cap f^{-1}[F] = \emptyset$

$G \subseteq V_1$: IDEM

$U_1 \cap V_1 = \emptyset$? $U_1 \cap V_1 = Y \setminus \big(f[X \setminus U] \cup f[X \setminus V]\big)$

$$= Y \setminus f[X \setminus U \cup X \setminus V]$$
$$= Y \setminus f[X \setminus (U \cap V)]$$
$$= Y \setminus f[X]$$
$$= \emptyset \leftarrow f \text{ IS SURJECTIEF!}$$

$\square$

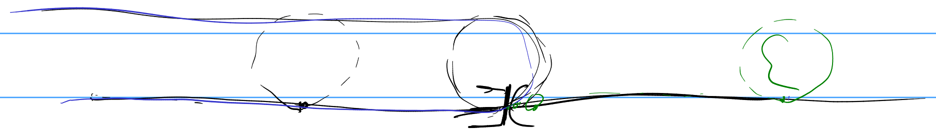
HET NIEMYTZKI-VLAK IS NIET NORMAAL.

HOE? WE ZOEKEN F EN G GESL.
EN DISJUNCT ZONDER DISJUNCTE OMG'N.

DAT MOET VAN DE x-AS KOMEN.

ELKE DEELVERZ. VAN DE x-AS
IS GESLOTEN IN N

Bijv $\{(x,0) : x \leq 0\}$ EN $\{(x,0) : x > 0\}$



$F = \{(q,0) : q \in \mathbb{Q}\}$

$G = \{(p,0) : p \notin \mathbb{Q}\}$

STEL U EN V ZIJN OPEN MET
$F \subseteq U$ EN $G \subseteq V$.

TE BEWIJZEN: $U \cap V \neq \emptyset$.

VOOR ELKE $p \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ IS ER EEN $n_p \in \mathbb{N}$
ZÓ DAT $B(p,0,n_p) \subseteq V$.

IDEM VOOR ELKE $q \in \mathbb{Q}$ IS ER EEN $n_q \in \mathbb{N}$
MET $B(q,0,n_q) \subseteq U$.

WE GAAN OP ZOEK NAAR
$p \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ EN $q \in \mathbb{Q}$ ZÓ DAT
$\underline{B(p,0,n_p) \cap B(q,0,n_q)} \neq \emptyset$.

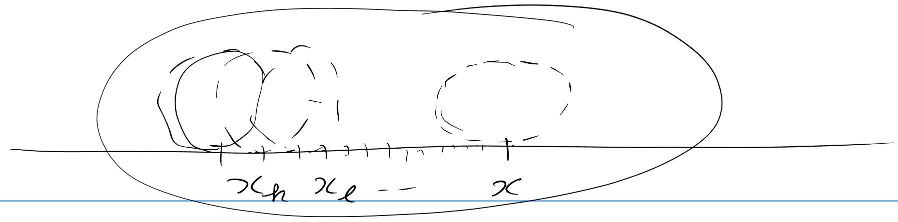
VOOR ELKE $n \in \mathbb{N}$ STELLEN WE

$$G_n = \{p \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} : n_p = n\}$$

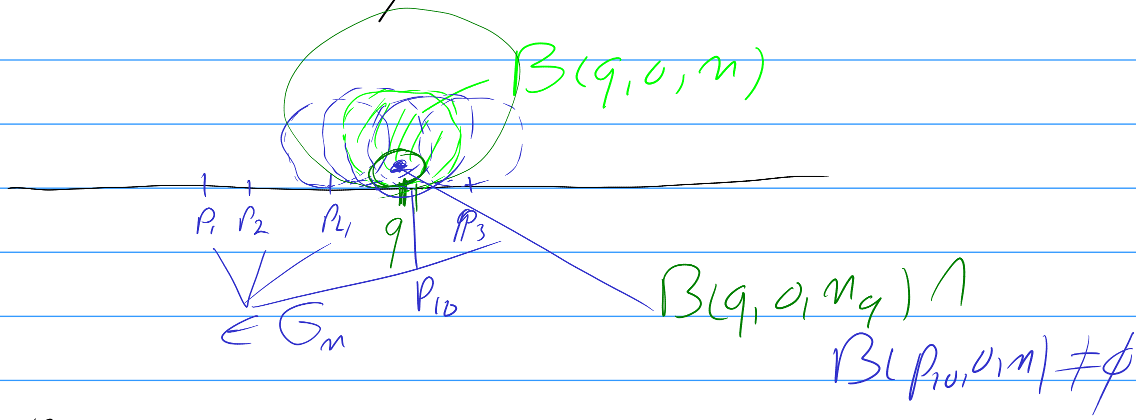
- $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n$
- ELKE G_n IS GESLOTEN IN $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ← GEWONE TOP VAN $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

STEL $(x_k)_k$ EEN RIJ IN G_n IS
EN $x_k \longrightarrow x$ IN DE GEWONE TOP. VAN $\mathbb{R}$

$B(x,0,n)\setminus\{(x,0)\} \subseteq \bigcup_k B(x_k,0,n)$



We willen een $n \in \mathbb{N}$ en een $q \in \mathbb{Q}$ zó dat er een rij $(p_k)_k$ in G_n is die naar q convergeert.



(*) **Bewering:**
Er is een $n \in \mathbb{N}$ zódat in de top. van $\mathbb{R}$ geldt
$$\operatorname{int} \operatorname{cl} G_n \neq \emptyset$$
Dan is elke $q \in \mathbb{Q} \cap \operatorname{int} \operatorname{cl} G_n$ als gewenst.
want zo'n q zit in $\operatorname{cl} G_n$ dus is er een rij in G_n die naar q convergeert.

Stel niet dan geldt dus voor elke open interval (a,b) en elke n dat $(a,b) \not\subseteq \overline{G_n}$
Tel $\mathbb{Q}$ af: $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$
Begin met $I_0 = (0,1)$
$I_0 \not\subseteq \overline{G_0}$
dus $I_0 \setminus \overline{G_0}$ is open en niet leeg
neem een open interval
$I_1 = (a_1, b_1)$ zódat
$[a_1, b_1] \subseteq I_0 \setminus \overline{G_0}$ en $q_0 \notin [a_1, b_1]$.

RECURSIEF ALS WE $I_n = (a_n, b_n)$
HEBBEN DAN WETEN WE
$I_n \setminus \overline{G_n}$ IS NIET LEEG EN OPEN
NEEM $I_{n+1} = (a_{n+1}, b_{n+1})$
MET $q_n \notin [a_{n+1}, b_{n+1}]$ EN
$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq I_n \setminus \overline{G_n}$

NU GELDT DAT
$$\bigcap I_n = \bigcap_n [a_n, b_n] \neq \emptyset$$
NEEM x IN DE DOORSNEDE
- $x \neq q_n$ VOOR ALLE n
- $x \notin G_n$ VOOR ALLE n

MAAR $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \bigcup_n G_n$ TEGENSPRAAK.

(*) IS DE CATEGORIESTELLING VAN BAIRE

ALS $(F_n)_n$ EEN RIJ DEELVERZ'N VAN $\mathbb{R}$ MET $\mathbb{R} = \bigcup_n F_n$
DAN IS ER EEN n
ZÓ DAT $\operatorname{int} \operatorname{cl} F_n \neq \emptyset$

ALS $\operatorname{int} \operatorname{cl} F = \emptyset$ DAN HEET
F NERGENS DICHT
$F_{2n} = \overline{G_n}$ $\quad F_{2n+1} = \{q_n\}$

DE STELLING GELDT VOOR VOLLEDIGE METRISCHE RUIMTEN.
VOOR $C([0,1], \mathbb{R})$ BIJVOORBEELD
ER IS EEN RIJ NERGENS DICHTE VERZ'N $(D_n)_n$ IN $C([0,1], \mathbb{R})$ ZÓ DAT ELKE FUNCTIE DIE IN EEN PUNT DIFFBAAR IS IN EEN D_n ZIT
$\bigcup_n D_n \neq C([0,1], \mathbb{R})$ ER ZIJN DUS CONTINUE NERGENS DIFFB. FUNCTIES.

ALS $(X, \mathcal{T})$ REGULIER IS MET EEN AFTELBARE BASIS DAN IS $(X, \mathcal{T})$ METRISEERBAAR:
ER IS EEN METRIEK DIE $\mathcal{T}$ BEPAALT.

(1) REGULIER + AFT. BASIS $\Rightarrow$ NORMAAL.

STEL $\mathcal{B}$ IS EEN AFT. BASIS
LAAT F EN G GESL. DISJ. ZIJN.

- X IS REGULIER DUS ALS $x \in F$ DAN IS ER EEN OPEN O MET $x \in O$ EN $\overline{O} \cap G = \emptyset$
  NEEM $B \in \mathcal{B}$ MET $x \in B \subseteq O$
  DAN OOK $\overline{B} \cap G = \emptyset$

$\mathcal{B}_F = \{ B \in \mathcal{B} : B \cap F \neq \emptyset, \overline{B} \cap G = \emptyset \}$
OVERDEKT F

$\mathcal{B}_G = \{ B \in \mathcal{B} : B \cap G \neq \emptyset, \overline{B} \cap F = \emptyset \}$
OVERDEKT G

$\mathcal{B}_F = \{ B_n : n \in \mathbb{N} \}$
$\mathcal{B}_G = \{ C_n : n \in \mathbb{N} \}$

$U_0 = B_0$ $\qquad$ $V_0 = C_0 \setminus \overline{B_0}$

$U_1 = B_1 \setminus \overline{C_0}$ $\qquad$ $V_1 = C_1 \setminus (\overline{B_0} \cup \overline{B_1})$

$\vdots$

$U_n = B_n \setminus \bigcup_{i<n} \overline{C_i}$ $\qquad$ $V_n = C_n \setminus \bigcup_{i \leq n} \overline{B_i}$

$\vdots$

$F \subseteq \bigcup_n U_n$ $\qquad$ $G \subseteq \bigcup_n V_n$

REKEN UIT: $\left(\bigcup_n U_n\right) \cap \left(\bigcup_n V_n\right) = \emptyset$