AM 3590 2020-11-10

REGULIER + AFT. BASIS $\Rightarrow$ METRISEERBAAR

MAAK EEN METRIEK DIE DE TOPOLOGIE BEPAALT.

METRIEK: VEEL CONTINUE FUNCTIES

$x \longmapsto d(x,y)$ (y VAST)

$x \longmapsto d(x,A)$ ($A \subseteq X$ VAST)

VORIGE KEER: REGULIER + AFT. BASIS $\Rightarrow$ NORMAAL

LEMMA VAN URYSOHN:
EEN RUIMTE $(X,\mathcal{T})$ IS T_4
DESDA VOOR ELK TWEETAL DISJUNCTE GESLOTEN VERZ'N F EN G ER EEN CONTINUE FUNCTIE $f: X \longrightarrow [0,1]$ IS MET
$$\begin{cases} f(x) = 0 & x \in F \\ f(x) = 1 & x \in G. \end{cases}$$

BEWIJS

$\Leftarrow$ DUIDELIJK
GEGEVEN f NEEM BIJV
$U = f^{-1}[\underset{a}{[0,1/3)}]$ EN $V = f^{-1}[\underset{b}{(2/3,1]}]$

$a \subseteq b$

$\Rightarrow$ WE GEBRUIKEN:
ALS A GESLOTEN IS EN O OPEN MET $A \subseteq O$
DAN IS ER EEN OPEN V MET
$$A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq O$$

$V_1 = U_{\frac{1}{4}}$, $U_{\frac{1}{2}}$, $V_2 = U_{\frac{3}{4}}$

WE HEBBEN F EN G
WE GAAN EEN FAMILIE OPEN VERZ'N MAKEN $\{U_q : q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$

1. $F \subseteq U_0$
2. $U_1 = X \setminus G$
3. ALS $p < q$ DAN $\overline{U_p} \subseteq U_q$

ALS WE DIE HEBBEN DEFINIEER DAN $f : X \longrightarrow [0,1]$
DOOR

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ALS } x \in G \\ \inf\{q : x \in U_q\} & x \notin G \end{cases}$$

- $x \in F$: $f(x) = 0$
- $x \in G$: $f(x) = 1$
- f IS CONTINU :

$\mathcal{S} = \{[0,q) : q \in (0,1)\}$
$\quad \cup \{(p,1] : p \in (0,1)\}$
IS EEN SUBBASIS VOOR DE TOPOLOGIE VAN $[0,1]$.
WE HOEVEN ALLEEN VAN
$f^{-1}[[0,q)]$ EN $f^{-1}[(p,1]]$
VAST TE STELLEN DAT ZE OPEN ZIJN

BEKIJK $f^{-1}[[0,q)]$
$x \in f^{-1}[[0,q)]$ BETEKENT $f(x) < q$
DAT BETEKENT:
$\inf\{r : x \in U_r\} < q$
DAT BETEKENT
ER IS EEN $r < q$ MET $x \in U_r$
DAT $x \in \bigcup_{r<q} U_r$: DIT IS OPEN.

BEKIJK $f^{-1}[(p,1]]$

$x \in f^{-1}[(p,1]]$ BETEKENT $f(x) \geq p$

$f(x) > p$ BETEKENT

ER IS EEN $r \in \mathbb{Q}$

MET $f(x) > r > p$

VOOR ZO'N r GELDT $x \notin U_r$

VOOR ZO'N r GELDT OOK $x \notin \overline{U_r}$

NEEM $s \in \mathbb{Q}$ MET

$f(x) > s > r$

DAN $x \notin U_s \supseteq \overline{U_r}$

$\longrightarrow$ $f(x) > p$ DESDA ER IS $r \in \mathbb{Q}$

MET $r > p$ EN

$x \notin \overline{U_r}$

$f(x) > p$ DESDA

$$x \in \bigcup_{r>p} (X \setminus \overline{U_r})$$

L OPEN

ALS $f: X \to [0,1]$ CONTINU IS

DAN DEFINIEERT

$$U_q = f^{-1}[[0,q)]$$

ZO'N FAMILIE

F, G, $U_1 = X \setminus G$

T_4: NEEM U_0 MET $F \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_1$

NEEM EEN AFTELLING VAN

$\mathbb{Q} \cap [0,1]$ MET $q_0 = 0$, $q_1 = 1$

$\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$

MET RECURSIE KIEZEN WE U_{q_n} ..

BIJV VOOR q_2 NEEM

U_{q_2} OPEN MET $\overline{U_{q_0}} \subseteq U_{q_2} \subseteq \overline{U_{q_2}} \subseteq U_{q_1}$

q_0 q_3 q_2 q_3 q_1

U_{q_3} : ?

NEEM U_{q_3} MET
$\overline{U_{q_0}} \le U_{q_3} \le \overline{U_{q_3}} \le U_{q_2}$

NEEM U_{q_3} MET
$\overline{U_{q_2}} \le U_{q_3} \le \overline{U_{q_3}} \le U_{q_1}$

GEGEVEN $\{U_{q_i} : i < n\}$ BEPALEN WE U_{q_n} ALS VOLGT:

VERDEEL DE q_i MET $i < n$ IN TWEE GROEPEN:

1. $q_i < q_n$
2. $q_i > q_n$

r = MAX GROEP 1 $\quad$ s = MIN GROEP 2

BEKIJK U_r EN U_s

$\overline{U_r} \le U_s$

RECURSIEAANNAME:
$q_i < q_j$: $\overline{U_{q_i}} \le U_{q_j}$

NEEM U_{q_n} MET

$$\overline{U_r} \le U_{q_n} \le \overline{U_{q_n}} \le U_s$$

DIT BEPAALT $\{U_{q_n} : n \in \mathbb{N}\}$

DWZ
$\{U_q : q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$

KLAAR

AFT BASIS + REGULIER $\rightarrow$ NORMAAL

NORMAAL $\Leftrightarrow$ "VEEL CONTINUE FUNCTIES"

(WEGENS T_2 VOOR ELKE $x \neq y$ EN $a, b \in \mathbb{R}$ $f: X \to \mathbb{R}$ MET $f(x) = a$, $f(y) = b$)

METRIEK MAKEN

$\mathcal{B}$ EEN AFT. BASIS VOOR $(X, \mathcal{T})$

OPM ALS $x \in O$ MET O OPEN

DAN IS ER EEN $B \in \mathcal{B}$

MET $x \in B \subseteq \overline{B} \subseteq O$

EN NOG EEN $C \in \mathcal{B}$

MET $x \in C \subseteq \overline{C} \subseteq B$

ER IS DUS EEN PAAR

$(C, B) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ MET

$x \in C \subseteq \overline{C} \subseteq B \subseteq \overline{B} \subseteq O$

BEKIJK $\left\{ (C, B) \in \mathcal{B}^2 : \begin{array}{l} C \neq \emptyset \\ \overline{C} \subseteq B \end{array} \right\}$

AFT. VEEL, NUMMER ZE:

$\{ (C_n, B_n) : n \in \mathbb{N} \}$

VOOR ELKE n NEMEN WE

$f_n : X \longrightarrow [0, 1]$

CONTINU MET $\begin{cases} f_n(x) = 0 & x \in \overline{C_n} \\ f_n(x) = 1 & x \notin B_n \end{cases}$

DEFINIEER

$$d(x,y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \cdot |f_n(x) - f_n(y)|$$

- $d(x,y) \geq 0$ ✓ $\quad (d(x,y) \leq 2)$
- $d(x,y) = d(y,x)$ ✓
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ ✓

  $|f_n(x) - f_n(z)| \leq |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f_n(z)|$
- $d(x,y) = 0 \iff x = y$

  $\Leftarrow$ DUIDELIJK

  $\Rightarrow$ STEL $x \neq y$

  ER IS EEN n MET

  $x \in C_n \subseteq \overline{C_n} \subseteq B_n \subseteq X \setminus \{y\}$

  DAN $f_n(x) = 0$, $f_n(y) = 1$

  DUS $d(x,y) \geq 2^{-n}$

DE METRIEK d BEPAALT DE TOPOLOGIE

① ELKE d-BOL IS OPEN (IN $\mathcal{T}$)

DAN $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}$

② ALS $x \in O$ EN $O \in \mathcal{T}$

DAN IS ER EEN $r > 0$

MET $B(x,r) \subseteq O$

DIT GEEFT $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_d$

② STEL $O \in \mathcal{T}$ EN $x \in O$.

NEEM EEN n MET

$x \in C_n \subseteq \overline{C_n} \subseteq B_n \subseteq O$.

NU: ALS $y \notin O$

DAN $|f_n(x) - f_n(y)| = |0 - 1| = 1$

EN DUS $d(x,y) \geq 2^{-n}$.

DUS ALS $d(x,y) < 2^{-n}$

DAN $y \in O$

(CONTRAPOSITIE)

CONCLUSIE $B(x, 2^{-n}) \subseteq O$.

(1) $B(x, r) = \{ y : d(x,y) < r \}$

$= g^{-1}[(-\infty, r)]$ $[0, r)$

WAARBIJ $g(y) = d(x,y)$

IS g CONTINU? ZO JA: KLAAR

- BIJ VASTE n IS

$y \longmapsto |f_n(x) - f_n(y)|$

CONTINU.

DE REEKS $\sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} |f_n(x) - f_n(y)|$

CONVERGEERT UNIFORM (M-TEST)

DE SOM IS CONTINU.

OPGAVE

ALS $(f_n)_n$ EEN RIJ CONTINUE FUNCTIES IS VAN $(X, \mathcal{T})$ NAAR $\mathbb{R}$ DIE UNIFORM CONVERGEERT NAAR f DAN IS f CONTINU.

[BEWIJS: f CONTINU IN ELK PUNT].

STELLING VAN TIETZE–URYSOHN.

STEL $(X, \mathcal{T})$ IS EEN TOP. RUIMTE EN $A \subseteq X$ DAN IS

$\mathcal{T}_A = \{ O \cap A : O \in \mathcal{T} \}$

EEN TOPOLOGIE op A:

DE <u>DEELRUIMTETOPOLOGIE</u>

STELLING:
ALS $(X, \mathcal{T})$ EEN T_4-RUIMTE IS
DAN GELDT:
VOOR ELKE GESLOTEN DEELRUIMTE
F EN ELKE CONTINUE
FUNCTIE $f : F \to \mathbb{R}$
BESTAAT EEN CONTINUE
FUNCTIE $g : X \to \mathbb{R}$
MET $g(x) = f(x) \quad (x \in F)$

IMPLICEERT LEMMA VAN URYSOHN
ALS F EN G GESL. DISJ. zijn
DAN IS $f : F \cup G \to \mathbb{R}$
$x \in F \to f(x) = 0$
$x \in G \to f(x) = 1$

CONTINU op $F \cup G$.
DIE HEEFT UITBREIDING
$g : X \to \mathbb{R}$

EVT. VERVANG g DOOR
$h(x) = \max\{\min\{g(x), 1\}, 0\}$
$h : X \to [0, 1]$

LEMMA:
ALS $(X, \mathcal{T})$ EEN T_4-RUIMTE IS
EN F EN G ZIJN GESCHEIDEN
F_σ-VERZAMELINGEN
DAN HEBBEN F EN G
DISJUNCTE OPEN OMG'N
$F \subseteq U$, $G \subseteq V$, $U \cap V = \emptyset$

GESCHEIDEN: $\overline{F} \cap G = F \cap \overline{G} = \emptyset$

F_σ - VERZ: VERENIGING VAN AFT. VEEL GESLOTEN VERZ'N.

$$F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \quad \text{ELKE } F_n \text{ GESLOTEN}$$

$\mathbb{Q}$ IS F_σ - VERZ: $\mathbb{Q} = \bigcup \{\{q\} : q \in \mathbb{Q}\}$

$$(0, 1) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [2^{-n}, 1 - 2^{-n}]$$

DUAAL: G_δ - VERZ:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n \quad O_n \text{ OPEN}$$